ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΕΤΑΡΤΗ 17 ΙΟΥΝΙΟΥ 2020
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ. 76 σχολικού βιβλίου

Α2. Ορισμός σελ. 104 σχολικού βιβλίου

Α3. α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $f(x)=x^3$ αν κι είναι γνησίως αύξουσα στο R , εντούτοις έχει παράγωγο $f'(x)=3x^2$, η οποία δεν είναι θετική σε όλο το R, αφού $f'(0)=0$.

Α4. α) Λάθος
β) Σωστό
γ) Σωστό
δ) Σωστό
ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$f:(1,+\infty)\to R$ με $f(x)=\dfrac{x+2}{x-1}$

$g:R\to R$ με $g(x)=e^x$

Β1. $D_{fog}=\{x\in R\ \mu\varepsilon\ g(x)\in A_f\}=(0,+\infty)$, με τύπο:

$$(fog)(x)=f(g(x))=\frac{e^x+2}{e^x-1},\ x>0$$

Β2. Για κάθε $x_1,x_2>0$ με $(fog)(x_1)=(fog)(x_2)$ έχουμε:

$$\frac{e^{x_1}+2}{e^{x_1}-1}=\frac{e^{x_2}+2}{e^{x_2}-1}\Rightarrow(e^{x_1}+2)(e^{x_2}-1)=(e^{x_2}+2)(e^{x_1}-1)\Leftrightarrow e^{x_1}e^{x_2}-e^{x_1}+2e^{x_2}-2=$$
$$=e^{x_2}e^{x_1}-e^{x_2}+2e^{x_1}-2\Leftrightarrow 3e^{x_2}=3e^{x_1}\Leftrightarrow e^{x_2}=e^{x_1}\Leftrightarrow x_1=x_2$$

Θέτουμε: $y=\dfrac{e^x+2}{e^x-1}$, $x>0$, άρα

$$y(e^x-1)=e^x+2\Leftrightarrow ye^x-y=e^x+2\Leftrightarrow ye^x-e^x=y+2\Leftrightarrow e^x(y-1)=y+2\Leftrightarrow e^x=\frac{y+2}{y-1}$$

Πρέπει:

$\frac{y+2}{y-1}>0$ για $y\neq 1:(y+2)(y-1)>0$

y		-2		1	
y+2	-	0	+		+
y-1	-		-	0	+
Γ	+	‖	-	‖	+

Άρα y<-2 ή y>1, οπότε

$x=\ln\frac{y+2}{y-1}$ και

$$x>0\Rightarrow \ln\frac{y+2}{y-1}>\ln 1\Rightarrow \frac{y+2}{y-1}>1\Rightarrow \frac{y+2}{y-1}-1>0\Leftrightarrow \frac{y+2-y+1}{y-1}>0\Leftrightarrow \frac{3}{y-1}>0,$$

οπότε για y>1, έχουμε:

$$(fog)^{-1}(x)=\ln\frac{x+2}{x-1},\ x>1$$

B3. $\Phi(x)=\ln\frac{x+2}{x-1},\ x>1$

$$\Phi'(x)=\frac{x-1}{x+2}\left(\frac{x+2}{x-1}\right)'=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{x-1-x-2}{(x-1)^2}=\frac{x-1}{x+2}\cdot\frac{-3}{(x-1)^2}=-\frac{3}{(x+2)(x-1)}<0, x>1$$

Άρα $\Phi\downarrow(1,+\infty)$

B4. $\lim\limits_{x\to 1^+}\ln\frac{x+2}{x-1}=\lim\limits_{u\to+\infty}\ln u=+\infty$

Θέτω, $u=\frac{x+2}{x-1}$

$$u_0=\lim_{x\to 1^+}\frac{x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}(x+2)\frac{1}{x-1}=+\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\ln\frac{x+2}{x-1}=\lim_{u\to 1}\ln u=0$$

Θέτω, $u=\frac{x+2}{x-1}$

$$u_0=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+2}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=1$$

Άρα $\lim\limits_{u\to 1}\ln u=0$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

f συνεχής στο $\left(-\infty, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ άρα και στο 0 οπότε:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0^+}(\eta\mu x + \lambda\sigma\upsilon\nu x) = \lambda$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{1}{1-x} - \ln\lambda\right) = 1 - \ln\lambda$$

$$f(0) = 1 - \ln\lambda$$

Άρα λ=1-lnλ $\Leftrightarrow$ λ+lnλ-1=0

Θεωρούμε g(λ) = λ+lnλ-1 με λ>0

g΄(λ)=1+$\dfrac{1}{\lambda} > 0$, για κάθε λ>0

Άρα g γνησίως αύξουσα στο (0, $+\infty$) και g(1)=0 οπότε το 1 μοναδική ρίζα της g

Γ2.

Αρκεί να αποδείξουμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο x_o=0:

- $\displaystyle \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{\frac{1}{1-x}-1}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1-1+x}{x(1-x)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x}{x(1-x)} = \lim_{x\to 0^-}\frac{1}{1-x} = 1$
- $\displaystyle \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\eta\mu x}{x} + \frac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x}\right) = 1$

Οπότε f παραγωγίσιμη στο x_0=0 με f΄(0)=1, άρα ορίζεται εφαπτομένη της c_f στο Α(0,1) που σχηματίζει γωνία $\dfrac{\pi}{4}$ με τον x΄x

Γ3.

Το 0 δεν είναι κρίσιμο σημείο διότι η f είναι παραγωγίσιμη στο 0

- f παραγωγίσιμη στο (-∞,0) με $f'(x) = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ f΄(x)>0 στο (∞,0) άρα $f'(x) \neq 0$ για x<0
- f παραγωγίσιμη στο $\left(0, \dfrac{3\pi}{2}\right)$ με f΄(x)=συνx-ημx
- f΄(x)=0 $\Leftrightarrow$ συνx-ημx=0 $\Leftrightarrow$ ημx=συνx

Άρα εφx=1 άρα x=$\frac{\pi}{4}$ ή x=$\frac{5\pi}{4}$, $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$

Άρα κρίσιμα σημεία είναι τα $\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ και $\left(\frac{5\pi}{4}, -\sqrt{2}\right)$

Γ4.

Έστω M(α, f(α))

- Βρίσκουμε την εφαπτομένη της c_f στο M(α, f(α)):

$$y - f(a) = f'(a)(x-a) \Leftrightarrow y - \frac{1}{1-a} = \frac{1}{(1-a)^2}(x-a)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{(1-a)^2}x - \frac{a}{(1-a)^2} + \frac{1}{1-a}$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{(1-a)^2}x - \frac{a}{(1-a)^2} + \frac{1}{(1-a)^2}$$

$$y = \frac{1}{(1-\alpha)^2}x + \frac{1-2\alpha}{(1-\alpha)^2}$$

- Βρίσκουμε το σημείο τομής της εφαπτομένης με το x΄x

Για y=0: $0 = \frac{1}{(1-\alpha)^2}x + \frac{1-2a}{(1-a)^2} \Leftrightarrow x = 2a - 1$

Άρα B(2α-1,0)

Οπότε $x_B(t)$=2α(t)-1

$$x'_B(t) = 2a'(t) = 2\left(-\frac{a(t)}{3}\right) = -\frac{2a(t)}{3}$$

Για t=t_o:

$$x'_{B(t_o)} = -\frac{2a(t_o)}{3} = -\frac{2(-1)}{3} = \frac{2}{3}$$

ΘΕΜΑ Δ

$f(x)=e^x+x^2-ex-1$

Δ1. f παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=e^x+2x-e$

- Αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$
  f' συνεχής στο [0,1]
  $f'(0)=1-e<0$
  $f'(1)=2>0$
  Από θεώρημα Bolzano υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τέτοιο ώστε $f'(x_0)=0$

- Για να είναι το x_0 μοναδικό πρέπει η f' να είναι 1-1. Οπότε $f''(x)=e^x+2>0$ για κάθε $x\in(0,1)$ άρα f' γνησίως αύξουσα οπότε 1-1 άρα το x_0 είναι μοναδικό.
- Για να είναι το x_0 ολικό ελάχιστο πρέπει να αλλάζει το πρόσημο της f'. Οπότε:
  $0<x<x_0$ έχουμε $f'(x)<f'(x_0)\Leftrightarrow f'(x)<0$
  $1>x>x_0$ έχουμε $f'(x)>f'(x_0)\Leftrightarrow f'(x)>0$

x	0	x_0	1
f'(x)	-		+
f(x)	↘		↗

Η f στο x_0 έχει ολικό ελάχιστο το $f(x_0)=e^{x_0}+x_0^2-ex_0-1$

Έχουμε $f'(x_0)=0\Leftrightarrow e^{x_0}+2x_0-e=0\Leftrightarrow e^{x_0}=e-2x_0$

Άρα $f(x_0)=e-2x_0+x_0^2-ex_0-1=x_0^2-x_0(e+2)+e-1$

Δ2. $\lim\limits_{x\to x_0}\left[\dfrac{1}{f(x)-f(x_0)}+\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{x-x_0}\left[\dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}+(x-x_0)\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]$

Οπότε:

- $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{x-x_0}\left[\dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}+(x-x_0)\eta\mu\left(\dfrac{1}{x-x_0}\right)\right]=$

$$=\lim_{x\to x_0^-}\frac{1}{x-x_0}\left[\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}+(x-x_0)\eta\mu\left(\frac{1}{x-x_0}\right)\right]=+\infty$$

Διότι:

- $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{x-x_0}=-\infty$, διότι $x-x_0<0$ για $x\to x_0^-$

- $\lim\limits_{x\to x_0^-}\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=-\infty$ διότι $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0$, αφού $f(x)\geq f(x_0)$ και $x\to x_0^-$

- $\lim\limits_{x\to x_0^-}(x-x_0)\cdot \eta\mu\dfrac{1}{x-x_0}\overset{u=\frac{1}{x-x_0}}{\underset{u\to-\infty}{=}}\lim\limits_{u\to-\infty}\dfrac{\eta\mu u}{u}=\lim\limits_{y\to 0}y\,\eta\mu\dfrac{1}{y}=0$

➢ $\lim\limits_{x\to x_0^+}\dfrac{1}{x-x_0}\left[\dfrac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}+(x-x_0)\eta\mu\dfrac{1}{x-x_0}\right]=+\infty$

Ομοίως.

Δ3. Θεωρούμε συνάρτηση $g(x)=f(x)+x-x_0$, $x\in[x_0,1]$

g συνεχής στο $[x_0,1]$

$g(x_0)=f(x_0)<0$

$g(1)=f(1)+1-x_0=1-x_0>0$

Βρίσκουμε το πρόσημο της f.

$f\uparrow[0,x_0]$ άρα $f([0,x_0])=[f(x_0),f(0)]=[f(x_0),0]$, και

$f\uparrow[x_0,1]$ άρα $f([x_0,1])=[f(x_0),f(0)]=[f(x_0),0]$

Άρα $f(x)\leq 0$ και $f(x_0)\leq f(x)\leq 0$, οπότε $f(x_0)<0$

Από θ. Bolzano υπάρχει $\rho\in(x_0,1)$

Τ. ώστε $g(p)=0$

➢ Μονοτονία της g

$g'(x)=f'(x)+1>0$ αφού $f'(x)>0$ στο $(x_0,1)$ οπότε το p είναι μοναδική ρίζα.

Δ4. Για κάθε $\kappa\in(p,1)$ αρκεί να αποδείξουμε:

$$f(x_0)>f(p)(f'(\kappa)+1)\overset{f(p)<0}{\Leftrightarrow}\frac{f(x_0)}{f(p)}<f'(\kappa)+1\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x_0)}{f(p)}-1<f'(\kappa)\Leftrightarrow\frac{f(x_0)-f(p)}{f(p)}<f'(\kappa)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{f(x_0)-x_0+p}{f(p)}<f'(\kappa)\Leftrightarrow\frac{g(p)}{f(p)}<f'(\kappa)\Leftrightarrow f'(\kappa)>0 \quad (1)$$

Ισχύει ότι $f'(x)>0$ στο $(x_0,1)$ άρα η (1) ισχύει για κάθε $\kappa\in(p,1)$