ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2019

ΘΕΜΑ Α

Α1.

α) Ορισμός σελ. 15

β) i. Ορισμός σελ. 35

ii. Ορισμός σελ. 36

Α2. Διατύπωση θεωρήματος Fermat σελ. 142

Α3. Απόδειξη θεωρήματος σελ. 135

Α4.

α) Ψευδής ισχυρισμός διότι υπάρχουν συναρτήσεις όπως για παράδειγμα η

$f(x)=\begin{cases} -1, & x<0 \\ 1, & x>0 \end{cases}$ που ισχύει $f'(x)=0$

για $x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ εντούτοις η f δεν είναι σταθερή.

β) Ψευδής ισχυρισμός διότι υπάρχουν συναρτήσεις όπως για παράδειγμα η

$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & ,x\neq 1 \\ 4, & ,x=1 \end{cases}$ για την οποία

$$\lim_{x\to 1} f(x)=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

Εντούτοις $f(1)=4$

Α5. $E(\Omega_1)=\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx=2$

$$E(\Omega_2)=\int_{\beta}^{\gamma}|f(x)|dx=1$$

$$E(\Omega_3)=\int_{\gamma}^{\delta}f(x)dx=3$$

Οπότε:

$$\int_{\alpha}^{\delta}f(x)dx=2-1+3=4$$

Άρα η σωστή είναι το (γ)

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ αφού έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την y=2

$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^{-x}+\lambda\right)=2 \Leftrightarrow 0+\lambda=2 \Leftrightarrow \lambda=2$

Β2.

Θεωρούμε $g(x)=f(x)-x=e^{-x}+2-x$ και $x\in[2,3]$

- g συνεχής στο [2,3]
- $g(2)=e^{-2}+2-2=\frac{1}{e^2}>0$
- $g(3)=e^{-3}+2-3=\frac{1}{e^3}-1<0$

Άρα από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(2,3)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$

Μοναδικότητα ρίζας

$g'(x)=-e^{-x}-1=-\frac{1}{e^x}-1<0$ στο (2,3) άρα g γνησίως φθίνουσα στο [2,3] άρα 1-1 οπότε η ρίζα είναι μοναδική.

Β3.

$f(x)=e^{-x}+2, x\in R$

$f'(x)=-e^{-x}=-\frac{1}{e^x}<0$ για κάθε $x\in R$

Άρα f είναι γνησίως φθίνουσα, άρα είναι «1-1» άρα υπάρχει η αντίστροφη f^{-1}

Θέτουμε y = f(x) $\Leftrightarrow$ y = $e^{-x}+2$ $\Leftrightarrow$ $e^{-x}=y-2$ $\Leftrightarrow$ -x= ln (y-2) $\Leftrightarrow$ X=-ln(y-2) με y-2>0 $\Leftrightarrow$ y>2

Άρα $f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$ με $x\in(2,+\infty)$

B4.

$f^{-1}(x)=-\ln(x-2)$ με $x\in(2,+\infty)$

Κατακόρυφη Ασύμπτωτη:

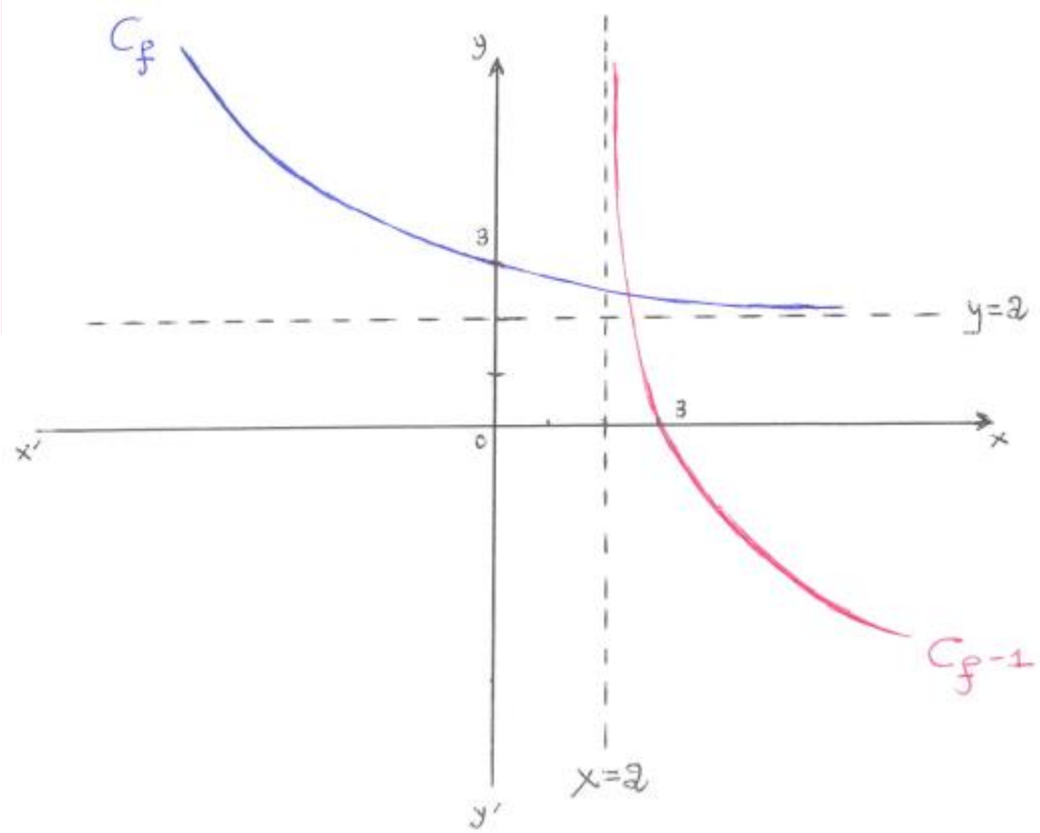
$$\lim_{x\to 2^+} f^{-1}(x)=\lim_{x\to 2^+}(-\ln(x-2))$$

Θέτουμε ω = x-2

x $\to 2^+$ τότε ω $\to 0^+$

Άρα $\lim_{x\to 2^+} f^{-1}(x)=\lim_{\omega\to 0^2}(-\ln\omega)=+\infty$

Δηλαδή η x=2 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f^{-1}



$$f(x)=\begin{cases} x^2+a, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+\beta x, & x<1 \end{cases}$$

Γ1.

- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)= f(1)$ (1)

  Οπότε

  $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+\beta x\right)=1+\beta$

  $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(x^2+a\right)=1+a$

  $f(1)=1+a$

(1): $\quad 1+a=1+\beta \Leftrightarrow a=\beta$

- $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^2+a-1-a}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1}=2$
- $\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x-1}+\beta x-1-a}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{e^{x-1}+ax-1-a}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(e^{x-1}+a\right)=1+a$

Άρα $1+a=2 \Leftrightarrow a=1$ και $\beta=1$

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+x, & x<1 \end{cases}$$

Γ2.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x, & x\geq 1 \\ e^{x-1}+1, & x<1 \end{cases}$$

Για $x\geq 1,\ \ f'(x)>0$

Για $x<1,\ \ f'(x)>0$

$f'(x)>0$ για $x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$ κι επειδή f συνεχής στο 1 θα είναι γν. αύξουσα στο $\Re$.

Επειδή f γν. αύξουσα και συνεχής στο R θα είναι $f(R)=\left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ με

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{x-1}+x\right)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2+1\right)=+\infty$

Άρα $f(R)=R$

Γ3.

i. $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

Άρα υπάρχει κ<0 ώστε $f(\kappa)<0$ και $f(0)=\dfrac{1}{e}>0$

Για την f στο [κ,0] ισχύει το θεώρημα Bolzano οπότε υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\kappa,0)$ ώστε $f(x_0)=0$

Επειδή η f γνησίως αύξουσα στο R, άρα και 1-1 οπότε το x_0 μοναδική αρνητική ρίζα.

ii.

$f^2(x)-x_0 f(x)=0 \Leftrightarrow f(x)\left(f(x)-x_0\right)=0$

Για $x\neq x_0$ ισχύει , $f(x)\neq 0$

Άρα η εξίσωση γίνεται $f(x)-x_0=0$

Για $x>x_0$ επειδή f γν. αύξουσα θα είναι $f(x)>f(x_0)\Leftrightarrow f(x)>0$

Επειδή $x_0<0$ η εξίσωση $f(x)=x_0$ είναι αδύνατη.

Γ4.

Για $x\geq 1$

Είναι $E=\dfrac{1}{2}(OK)(\mathrm{KM})=\dfrac{1}{2}|x||f(x)|=\dfrac{1}{2}x\left(x^2+1\right)=\dfrac{1}{2}\left(x^3+x\right)$

Το εμβαδόν συναρτήσει του χρόνου είναι $E(t)=\dfrac{1}{2}\left(x^3(t)+x(t)\right)$

Είναι $E'(t)=\dfrac{1}{2}\left(3x^2(t)\cdot x'(t)+x'(t)\right)$

Για $t = t_0$ είναι

$$E'(t_0) = \frac{1}{2}\left(3x^2(t_0)x'(t_0) + x'(t_0)\right) = \frac{1}{3}\left(3\cdot 3^2 \cdot 2 + 2\right) = \frac{1}{2}56 = 28\,{}^{\mu^2}\!/_{\sec}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$f'(1) = -1$

$$f'(x) = \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2}\ln(x^2 - 2x + 2) + a$$

α = -1

$\mathrm{A} \in C_f \,:\, f(1) = 1 \Leftrightarrow a + \beta = 1$

Δ2.

Έστω h(x)=f(x)-y=(x-1)ln(x^2-2x+2)

Άρα με x>1 είναι h(x)>0

E(Ω) = $\int_1^2 (x-1)\ln\left[(x-1)^2 + 1\right] = \int_1^2 \frac{1}{2}\ln\omega d\omega$

Άρα $\mathrm{E}(\Omega) = \frac{1}{2}\left[\omega\ln\omega - \omega\right]_1^2 = \frac{2\ln 2 - 1}{2}\tau.\mu$

Δ3.

I. $f'(x) = \ln(x^2 - 2x + 2) + \frac{2(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} - 1$

Αφού $\ln\left[(x-1)^2 + 1\right] \geq \ln 1 = 0$

$\frac{2(x-1)^2}{(x-1)^2 + 1} \geq 0$ με πρόσθεση κατά μέλη έχουμε:

$f'(x) \geq -1$

II. Η ζητούμενη ανίσωση μετατρέπεται σε:

$f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right) \geq f(\lambda)-\frac{1}{2}$ που ισχύει αφού προκύπτει από Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $\left[\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right]$

Δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in \left(\lambda, \lambda+\frac{1}{2}\right): f'(x_0)=\dfrac{f(\lambda+\frac{1}{2})-f(\lambda)}{\lambda+\frac{1}{2}-\lambda}$

Επειδή $f'(x) \geq -1 \Leftrightarrow f\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)-f(\lambda) \geq -\frac{1}{2}$

Δ4.

Έστω κοινή εφαπτομένη στα $B(\kappa, f(\kappa)), \Gamma(\gamma, g(\gamma))$

- $f'(\kappa)=g'(\gamma)$ (1)
- $f(\kappa)-\kappa \cdot f'(\kappa)=g(\gamma)-\gamma \cdot g'(\gamma)$ (2)

Όμως είναι $f'(\kappa) \geq -1$ και $g'(x)=-3x^2-1 \leq -1$

Επομένως ισχύει η ισότητα μόνο όταν $f'(\kappa)=g'(\gamma)=-1$ που ισχύουν μόνο όταν κ=1 και γ=0.

Ελέγχω αν τα κ=1, γ=0 είναι λύσεις της (2), που ισχύει.

Εφαπτομένη της Cf στο Α(1,1)

$y-1=f'(1)\cdot(x-1)$

$y=-x+2$

Εφαπτομένη της Cg στο Γ(0,2)

$y=-x+2$