ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2021

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 135

Α2. Διατύπωση θεωρήματος σχολικού βιβλίου σελ. 51

Α3. Ορισμός σχολικού βιβλίου σελ. 23

Α4. α) Σωστό β) Λάθος γ) Σωστό δ) Σωστό ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

$$f : R \to R$$
$$f(x+1) = (x+1)e^{-x} \quad \forall x \in R$$

Β1.

Έστω $x+1 = u \Leftrightarrow x = u-1$,

Οπότε $f(u) = u \cdot e^{-(u-1)}$

$f(u) = u \cdot e^{1-u}$, άρα $f(x) = x \cdot e^{1-x}$

Β2. $f(x) = xe^{1-x} \quad x \in R$

$$f'(x) = e^{1-x} - xe^{1-x} = e^{1-x}(1-x)$$
$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(1-x) = 0 \Leftrightarrow 1-x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

x		1	
f'(x)	+	0	-
f(x)	↗		↘
		Ο.Μ.	

f(1)=1

Β3. $f''(x) = \left(e^{1-x}(1-x)\right)' = -e^{1-x}(1-x) - e^{1-x} = e^{1-x}(-1+x-1) = e^{1-x}(x-2)$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{1-x}(x-2) = 0 \Leftrightarrow x-2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

x		2	
f''(x)	-	0	+
f(x)	↷		↺
		Σ.Κ.	

$$f(2) = 2e^{-1} = \frac{2}{e}$$

Η f συνεχής στο R άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες
Πλάγιες-οριζόντιες

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{xe^{1-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}e^{1-x}\underset{u\to-\infty}{\overset{1-x=4}{=}}\lim_{u\to-\infty}e^{u}=0\Rightarrow\lambda=0$$

$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{1-x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^{x-1}}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{x-1}}=0$, άρα η y=0 οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$

Πλάγια οριζόντια στο $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{xe^{1-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}e^{1-x}\underset{y\to+\infty}{\overset{1-x=y}{=}}\lim_{y\to+\infty}e^{y}=+\infty$, άρα δεν έχει ασύμπτωτη στο $-\infty$

B4. $A_1=(-\infty,1]$ $\quad A_2=(1,+\infty)$

$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{1-x}\right)=-\infty$

$f(1)=1$

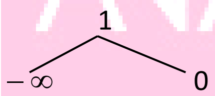
$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{1-x}\right)=0$

Άρα

$$f(A_1)=f((-\infty,1])\underset{\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{\overset{f\uparrow}{=}}\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),f(1)\right]=(-\infty,1]$$

$$f(A_2)=f((1,+\infty))\underset{\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{\overset{f\downarrow}{=}}\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),\lim_{x\to1}f(x)\right)=(0,1)$$

Άρα $f(A)=f(A_1)\cup f(A_2)=(-\infty,1]$



Αν $\lambda\le0$, η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει 1 ρίζα

Αν $0<\lambda<1$, η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει 2 ρίζες

Αν $\lambda=1$, η εξίσωση $f(x)=\lambda$ έχει 1 ρίζα

Αν $\lambda>1$, η εξίσωση $f(x)=\lambda$ δεν έχει ρίζες

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases}ax^3-3x^2-x+1, & x\le0\\ \sigma\upsilon\nu x, & 0<x\le\frac{3\pi}{2}\end{cases}$$

Γ1. Η f είναι συνεχής στο $(-\infty,0)$ ως πολυωνυμική και στο $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$ ως τριγωνομετρική.

Για x=0:

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\left(ax^3-3x^2-x+1\right)=1$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\sigma\upsilon\nu x=\sigma\upsilon\nu 0=1$

$f(0)=1$ οπότε $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$

Η f είναι συνεχής στο 0 οπότε είναι συνεχής στο $\left(-\infty,\dfrac{3\pi}{2}\right]$

Παραγωγισιμότητα στο $x_0=0$

- $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{ax^3-3x^2-x}{x}=\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{x\left(ax^2-3x-1\right)}{x}=-1$
- $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}\neq\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Γ2.

i. α) Η f είναι συνεχής στο $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$

β) Η f είναι παρ/μη στο $\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ με $f'(x)=-\eta\mu x$

γ) $f(0)=1$ και $f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\sigma\upsilon\nu\dfrac{3\pi}{2}=0$, άρα $f(0)\neq f\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)$

Η f δεν ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο $\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right]$

ii. $f'(x)=-\eta\mu x$

Για $\xi\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ έχουμε $-\eta\mu\xi=0\Leftrightarrow\eta\mu\xi=0\Leftrightarrow\xi=\pi$

Άρα το μοναδικό $\xi\in\left(0,\dfrac{3\pi}{2}\right)$ για το οποίο $f'(\xi)=0$ είναι το π.

Γ3.

$f(x)=ax^3-3x^2-x+1$ για $x\in(-\infty,0)$

$f'(x)=3ax^2-6x-1$

Οπότε $f'(x)=0\Leftrightarrow 3ax^2-6x-1=0$

$\Delta=36-4\cdot 3a\cdot(-1)=36+12a$

Για να δέχεται η C_f εφαπτομένη παράλληλη στον x'x ΠΡΕΠΕΙ $\Delta \geq 0$.

Οπότε για $\alpha < -3$ έχουμε $12\alpha < -36 \Leftrightarrow 12\alpha + 36 < 0$

Άρα $\Delta < 0$ οπότε $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x < 0$

Γ4.

Για $x < 0$ είναι $f'(x) = 3ax^2 - 6x - 1$.

Επειδή $\Delta < 0$ η f' θα είναι ομόσημα του α και επειδή $a < -3$ θα είναι $f'(x) < 0$ στο $(-\infty, 0)$.

Για $x \in \left(0, \frac{3\pi}{2}\right)$ είναι $f'(x) = -\eta\mu x$

Για $x = \pi$ θα είναι $f'(\pi) = 0$.

Οπότε το πρόσημο της f' φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$		0		π		$\frac{3\pi}{2}$
f'(x)		-	‖	-	0	+	
f(x)		↘		↘		↗	

f γν. φθίνουσα στο $(-\infty, \pi]$ αφού f συνεχής και γν. αύξουσα στο $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$

$f(\pi) = \sigma\upsilon\nu\pi = -1$ και $f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sigma\upsilon\nu\frac{3\pi}{2} = 0$. Οπότε η f στο $x_1 = \frac{3\pi}{2}$ έχει μέγιστο το 0

και στο $x_2 = \pi$ έχει ελάχιστο το -1. Άρα για κάθε $x \in \left(-\infty, \frac{3\pi}{2}\right]$ ισχύει ότι $f(x) \geq -1$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\ln x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \ln x - \frac{1}{x} = 0$

Θέτουμε $k(x) = \ln x - \frac{1}{x}$ με x>0

- Η k είναι συνεχής στο [1, e] ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων
- K(1)=-1 και $k(e) = \ln e - \frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{e} > 0$

Από θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, e)$ ώστε K(x_0) =0 Άρα

$$\ln x_0 - \frac{1}{x_0} = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \frac{1}{x_0}$$

Η K είναι παραγωγίσιμη στο $(0, +\infty)$ με $K'(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε x>0

Η Κ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$ οπότε έχει μία το πολύ ρίζα. Άρα το $x_0 \in (1,e)$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης $\ln x = \frac{1}{x}$

Δ2. Η f είναι παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x) = \ln x_0 - \frac{1}{x}$

Για $x = x_0$: $f'(x_0) = \ln x_0 - \frac{1}{x_0} = 0$ από Δ1 ερώτημα

Πρόσημο f΄

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x_0 - \frac{1}{x} > 0 \Leftrightarrow x\ln x_0 - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{1}{\ln x_0} \Leftrightarrow x > x_0$$

Άρα $f'(x) < 0$ για $x<x_0$

x	0		x_0		$+\infty$
f΄(x)	‖	-	0	+	
f(x)	‖	↗		↘	

Από τον πίνακα προσήμου της f΄παρατηρούμε ότι η f στο x_0 παρουσιάζει ελάχιστο το $f(x_0) = \ln x_0 - \frac{1}{x_0} = 0$

Δ3. Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g(x) = h(x) \Leftrightarrow xe^{-x} = \left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1}$ (1)

Έχει μία ακριβώς λύση.

Για x<0 θα είναι g(x)<0 και h(x)>0 οπότε η (1) είναι αδύνατη.

Για x=0: $0 = \frac{x_0}{e}$ άτοπο

Οπότε για x>0 η (1) γράφεται:

$$\ln\left(xe^{-x}\right) = \ln\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x+1} \Leftrightarrow \ln x + \ln e^{-x} = (x+1)\ln\frac{x_0}{e}$$

$$\Leftrightarrow \ln x - x = (x+1)(\ln x_0 - \ln e)$$

$$\ln x - x = (x+1)(\ln x_0 - 1) \Leftrightarrow \ln x - x = x\ln x_0 - x + \ln x_0 - 1$$

$$\Leftrightarrow \ln x = \ln x_0(x+1) - 1 \Leftrightarrow \ln x = \ln x_0(x+1) - 1$$

$$\Leftrightarrow \ln x_0(x+1) - \ln x - 1 = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

Από Δ2 αποδείξαμε ότι f(x_0)=0. Άρα το x_0 είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης (1) δηλαδή $g(x_0)=h(x_0)$

Αρκεί να δείξουμε ότι g΄(x_0)=h΄(x_0) για να έχουν κοινή εφαπτόμενη στο x_0

Οπότε $e^{-x_0}-x_0e^{-x_0}=\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}\ln\left(\frac{x_0}{e}\right)$

$\Leftrightarrow e^{-x_0}(1-x_0)=(\ln x_0-1)\left(\frac{x_0}{e}\right)^{x_0+1}$

$\Leftrightarrow e^{-x_0}(1-x_0)=(\ln x_0-1)x_0e^{-x_0} \Leftrightarrow 1-x_0=x_0(\ln x_0-1)$

$\Leftrightarrow 1-x_0=x_0\ln x_0-x_0 \Leftrightarrow x_0\ln x_0=1$

Για $\ln x_0=\frac{1}{x_0}$ έχουμε $x_0\frac{1}{x_0}=1$

Συνεπώς έχουμε g (x_0) = h (x_0) και g΄(x_0)=h΄(x_0) άρα οι γραφικές παραστάσεις των g και h δέχονται κοινή εφαπτομένη.

Δ4.

Η απόσταση των σημείων Α(x, f (x)) και Β (x, φ(x)) δίνεται από τον τύπο:
$d(x)=\sqrt{(x-x)^2+(f(x)-\phi(x))^2}=\sqrt{(f(x)-\phi(x))^2}=|f(x)-\phi(x)|$

Για x>0 ισχύει f(x)>φ(x) οπότε d(x)=f(x)-φ(x)

Αν η φ δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in(0,+\infty)$ τότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο της φ.

Αν η φ είναι παραγωγίσιμη στο $x_0\in(0,+\infty)$ τότε και η d είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και επειδή είναι ακρότατο από θεώρημα Fermat θα ισχύει: d΄(x_0)=0 άρα f΄(x_0)-φ΄(x_0)=0 $\Leftrightarrow \phi'(x_0)=f'(x_0)$ κι επειδή f΄(x_0)=0 θα είναι φ΄(x_0) =0. Οπότε το x_0 είναι κρίσιμο σημείο.