

ΘΕΜΑ Α

A₁.

i) Να αποδείξετε ότι για όλους τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει:

$$|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$$

[M 8]

ii) Πότε ισχύει η ισότητα;

[M 3]

A₂.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- i. Η απόσταση των αριθμών α, β είναι ίση με $|\beta - \alpha|$.
- ii. Η εξίσωση $x'' = \alpha$, με $\alpha < 0$ και n άρτιο φυσικό αριθμό είναι αδύνατη.
- iii. Για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$.
- iv. Αν α, β, γ πραγματικοί αριθμοί, τότε ισχύει:
$$\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta$$
- v. Αν $\alpha \cdot \gamma < 0$ τότε η εξίσωση $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.
- vi. Ισχύει: $x^2 > 1 \Leftrightarrow x > 1$ ή $x > -1$
- vii. Έστω το τριώνυμο $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$. Αν $\Delta < 0$ τότε το τριώνυμο διατηρεί πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

[M 14]

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι αριθμοί:

$$a = \sqrt[4]{9^2} + \sqrt{(2-\sqrt{3})^2} - \sqrt{(\sqrt{3}-2)^2} \text{ και } \beta = \sqrt{\sqrt{5}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{5}+1}$$

B1.

Να αποδείξετε ότι $\alpha=3$ και $\beta=2$

[M 6]

B2.

Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $x^2 - ax - 2\beta = 0$

[M 3]

ii. $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$

[M 5]

iii. $\frac{ax^2 - 8}{x^2 - 4} = \frac{4}{x + \beta} - \frac{3x}{2 - x}$

[M 5]

B3.

Αν $\beta < x < \alpha$, να δείξετε ότι: $|2 - x| + |x^2 + 1| - |6 - 2x| = x^2 + 3x - 7$

[M 6]

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - ax - 5 = 0$, με $a \in \mathbb{R}(1)$.

Γ1.

Να βρείτε το πλήθος των ριζών της (1) για κάθε $a \in \mathbb{R}$.

[M 3]

Γ2.

Αν $a \in \mathbb{Z}$ και ισχύει $\frac{5}{3} < 1 - \frac{2a}{3} < 3$, να βρεθεί ο αριθμός α .

[M 5]

Γ3.

Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης (1) για $a = -2$. Να υπολογιστούν οι παραστάσεις:

i. $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 \cdot x_2$

[M 3]

ii. $3x_1^3 x_2 + 3x_1 x_2^3$

[M 5]

Γ4.

Να βρείτε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της (1) για $a=-2$.

[M 5]

Γ5.

Να λυθεί η εξίσωση: $81(x-a)^4 - 16 = 0$, για $a = -2$

[M 4]

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η εξίσωση δευτέρου βαθμού:

$$(\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 3 = 0, \lambda \neq 2$$

Δ1.

i. Να αποδείξετε ότι: $\Delta = 4(-\lambda^2 + 7\lambda - 6)$ [M 4]

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες άνισες. [M 4]

Δ2.

Για ποιες τιμές του λ το τριώνυμο $A = (\lambda - 2)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 3$, είναι θετικό για κάθε $x \in \mathbb{R}$;

[M 5]

Δ3.

i. Αν το τριώνυμο A έχει ρίζα τον αριθμό $x_0 = 1$ να δείξετε ότι $\lambda = 5$ και ότι $A = 3x^2 - 10x + 7$ [M 3]

ii. Για $\lambda = 5$ να λυθεί η εξίσωση: $\frac{A}{x-1} = 0$ [M 4]

iii. Για $\lambda = 5$ να λυθεί η ανίσωση: $A^2 + |A + 4x - 4| \leq 0$ [M 5]