ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΟ ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ

ΤΑΞΗ: Α' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΑΛΓΕΒΡΑ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Να αποδειχθεί ότι για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει: $|\alpha+\beta| \le |\alpha|+|\beta|$

Μονάδες 9

Β. Να δοθεί ο ορισμός της τετραγωνικής ρίζας ενός μη αρνητικού αριθμού α

Μονάδες 6

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

1. Αν ένα τριώνυμο έχει $\Delta \le 0$ τότε διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in R$.
2. Ισχύει $\sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}} = \alpha^{\frac{\nu}{\mu}}$
3. Ισχύει: $\frac{\alpha}{\beta} < 1 \Rightarrow \frac{\beta}{\alpha} > 1$
4. Ισχύει: $\sqrt{x^2-6x+9} = x-3$
5. Αν μια εξίσωση δευτέρου βαθμού έχει 2 ρίζες τότε αυτές θα είναι άνισες μεταξύ τους.
6. Αν ένα τριώνυμο έχει δυο ρίζες ίσες τότε λέμε ότι έχει μια διπλή ρίζα.
7. Η εξίσωση $x^2+3x-2=0$, είναι αδύνατη.
8. Αν ένα τριώνυμο έχει δυο θετικές ρίζες τότε θα έχει $S>0$ και $P>0$
9. Αν ισχύει: $|x-1|+|y|=0$ τότε $x=1$ και $y=0$
10. Ισχύει: $\sqrt{x+y} = \sqrt{x}+\sqrt{y}$ για κάθε $x, y > 0$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνονται οι παραστάσεις: $\kappa = \left|3-\sqrt{17}\right| + \left|5-\sqrt{17}\right|$ και $\lambda = x^2-(x-3)\cdot(x-3)$

1. Να αποδείξετε ότι: $\kappa = 2$ και $\lambda = 9$
2. Να λυθεί η εξίσωση: $|x+\kappa| = \sqrt{\lambda}$
3. Να λυθεί η ανίσωση: $|2x-1| \le \kappa + \sqrt{\lambda}$
4. Να λυθεί η εξίσωση: $x^3-x^2+x-1=0$

Μονάδες (8+4+5+8)

ΘΕΜΑ 3ο

Έστω οι αριθμοί $\alpha = \left(\sqrt{5}-1\right)^2 - \left(\sqrt{5}+1\right)^2 - 4\left(1-\sqrt{5}\right)+5$, $\beta = \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$ και η παράσταση $\mathrm{A} = |x-1| - |x-4| + 5$ με $x \in [\alpha, \beta]$

1. Να αποδείξετε ότι: $\alpha = 1$ και $\beta = 4$
2. Να αποδείξετε ότι: $\mathrm{A} = 2x$
3. Να λυθεί η εξίσωση: $\dfrac{4}{2x-1} + \dfrac{2}{2x+1} = \dfrac{4x^2+1}{4x^2-1}$
4. Αν οι διαστάσεις ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι $x+2$ και $y-1$, όπου $x \in [\alpha, \beta]$ και $y \in [\alpha+1, 2\beta]$, να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή που μπορούν να πάρουν η περίμετρος και το εμβαδό του συγκεκριμένου ορθογωνίου.

Μονάδες (8+4+7+6)

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η παραμετρική εξίσωση: $(\lambda-2)x^2 - 2\lambda x + 2\lambda - 3 = 0$, με $\lambda \in R$ και $\lambda \neq 2$.

1. Να αποδείξετε ότι η παραπάνω εξίσωση έχει διακρίνουσα: $\Delta = -4\lambda^2 + 28\lambda - 24$
2. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in R$ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο πραγματικές άνισες ρίζες.
3. Να δείξετε ότι αν x_1, x_2 είναι οι δύο άνισες ρίζες της παραπάνω εξίσωσης τότε για αυτές ισχύει: $\dfrac{P}{S} = 1 - \dfrac{3}{2\lambda}$
4. Αν για τις δύο άνισες ρίζες της παραπάνω εξίσωσης x_1, x_2 ισχύει: $x_1^2 + x_2^2 = \dfrac{2\lambda}{(2-\lambda)^2}$, να αποδείξετε ότι $\lambda = 1$.

Μονάδες (8+6+4+7)

☻ *Καλή Τύχη σε όλους* ☻