

ΘΕΜΑ Α

A₁.

i) Πότε μία συνάρτηση f ονομάζεται γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της;

[M 3]

ii) Πότε μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέγεται περιττή;

[M 4]

A₂.

Να αποδείξετε ότι ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα $x-\rho$ να και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

[M 8]

A₃.

Να χαρακτηρίσετε καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις ως σωστή ή λάθος:

- i. Αν ένα γραμμικό σύστημα 2×2 έχει περισσότερες από μία διαφορετικές λύσεις, τότε θα έχει άπειρες.
- ii. Η συνάρτηση $f(x) = ax + \beta$, με $a < 0$, είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.
- iii. Αν $\eta\mu\omega = 0$, τότε υποχρεωτικά $\sigma\upsilon\nu\omega = 1$.
- iv. Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\upsilon\nu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
- v. Το μηδενικό πολυώνυμο είναι μηδενικού βαθμού.

[M 10]

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται πολυώνυμο $P(x) = \kappa x^4 - x^3 + \lambda x + 8$, $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$.

Αν το 2 είναι ρίζα και $P(1) = -7$

B1.

Να δείξετε ότι $\kappa = 2$ και $\lambda = -16$

[M 5]

B2.

- i. Να δείξετε ότι το $x - \frac{1}{2}$ είναι παράγοντας του $P(x)$ και ότι

$$P(x) = (x^3 - 8)(2x - 1)$$

[M 3]

- ii. Να λυθεί η εξίσωση $P(x) + 8 = x^3$

[M 4]

- iii. Να λυθεί η ανίσωση $\frac{P(x)}{x^2 - 2x + 3} \geq 0$

[M 4]

B3.

- i. Να βρείτε το πηλίκο $\pi(x)$ και το υπόλοιπο $\nu(x)$ της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x^3 - 2$.

[M 4]

- ii. Να λυθεί η εξίσωση: $\pi(x) = \sqrt{\pi^2(x) - x + 5}$

[M 5]

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \frac{\eta\mu(15\pi + x) + \sigma\nu(7\pi - x)\varphi(11\pi - x) + \eta\mu(\pi - x)}{\varphi(11\pi + x)\varphi\left(\frac{21\pi}{2} - x\right) + \eta\mu^2(\pi + x) + \eta\mu^2\left(\frac{\pi}{2} - x\right)}$$

Γ1.

- i. Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{\eta\mu x}{2}$ [M 5]
ii. Να βρεθεί η περίοδος της f και η μέγιστη τιμή της. [M 3]

Γ2.

Να λυθούν οι εξισώσεις:

- i. $f^2(x) + f(x) + \frac{1}{4} = 0$ [M 4]
ii. $4f(x) = \sqrt{3}$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$ [M 4]

Γ3.

Να αποδείξετε ότι $4f(x) \cdot \sigma\nu x \leq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

[M 4]

Γ4.

Να λυθεί το σύστημα:

$$\begin{cases} 16f\left(\frac{19\pi}{6}\right)x + 2y = 5 \\ 6x - 3y = -4\sqrt{2}f\left(\frac{27\pi}{4}\right) \end{cases}$$

[M 5]

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η πολυωνυμική συνάρτηση

$$f(x) = 2x^3 + (\cancel{\sigma\theta})x^2 - 15x - 18, \text{ με } \theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

Και η γραφική παράστασή της τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(3,0)$

Δ1.

Να δείξετε ότι $\theta = \frac{\pi}{4}$ και ότι $f(x) = 2x^3 + x^2 - 15x - 18$

[M 4]

Δ2.

- i. Να βρείτε για ποια x η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$. [M 4]
- ii. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $2\sigma\nu^3\omega - \eta\mu^2\omega - 15\sigma\nu\omega - 17 = 0$ είναι αδύνατη. [M 4]

Δ3.

Έστω επίσης η συνάρτηση

$$h(x) = \frac{f(x) - 2x^3 + \sigma\nu x + 15x + 18}{x^2 + 1}$$

- i. Να δείξετε ότι $h(x) = \frac{x^2 + \sigma\nu x}{x^2 + 1}$ και να εξετάσετε αν η h είναι άρτια ή περιττή. [M 3]
- ii. Να δείξετε ότι η h έχει μέγιστη τιμή το 1. [M 4]
- iii. Να βρεθεί η τιμή του x ώστε να έχει λύση ως προς φ η εξίσωση $\eta\mu\varphi + 2 = \frac{h(2022)}{h(-2022)} h(x)$. [M 6]