

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Να αποδείξετε ότι αν $0 \leq \alpha \neq 1$, τότε για οποιαδήποτε $\theta, \theta_1, \theta_2 > 0$ θα ισχύουν:

1. $\log_a \theta^k = k \log_a \theta$
2. $\log_a (\theta_1 \cdot \theta_2) = \log_a \theta_1 + \log_a \theta_2$

(Μονάδες 10)

B. Πότε μια συνάρτηση λέγεται περιοδική, με περίοδο T;

(Μονάδες 5)

Γ. Να χαρακτηρίσετε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) τις παρακάτω προτάσεις:

1. Η συνάρτηση $f(x) = 3^x$ έχει σύνολο τιμών το $[0, +\infty)$.
2. Η εξίσωση $5^x = 7^x$ είναι αδύνατη.
3. Η $f(x) = \sin x$ έχει περίοδο $T = 2\pi$
4. Η συνάρτηση $f(x) = (|\alpha| + 1)^x$ είναι γνησίως αύξουσα για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
5. Αν $x \leq y$ τότε ισχύει $\left(\frac{e}{2}\right)^x \leq \left(\frac{e}{2}\right)^y$.
6. Αν $f(x) = 4^x$ τότε το $f\left(f\left(\frac{1}{2}\right)\right) = 16$.
7. Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = e^x$ και $g(x) = e^{-x}$ είναι συμμετρικές ως προς τον άξονα $y'y$
8. Ισχύει $\eta\mu(a + \beta) = \eta\mu\alpha + \eta\mu\beta$
9. Οι γραφικές παραστάσεις όλων των εκθετικών συναρτήσεων $f(x) = \alpha^x$ με $0 \leq \alpha \neq 1$ διέρχονται από το ίδιο σημείο.
10. Η $f(x) = \eta\mu x$ έχει περίοδο $T = \pi$

(Μονάδες 10)

ΘΕΜΑ 2^ο

Δίνονται τα πολυώνυμα με ακέραιους συντελεστές: $P(x) = x^3 - 6x^2 + \alpha x + \beta$, τέτοιο ώστε:

$$P(4) \cdot P(1) = 0 \text{ και } 3P^2(0) + 19P(0) = -6 \text{ καθώς και το } Q(x) = \kappa x^3 - 7x^2 + 9x + \lambda$$

1. Να δείξετε ότι: $P(0) = -6$
2. Να δείξετε ότι: $\alpha = 11$ και $\beta = -6$
3. Αν το πολυώνυμο $Q(x)$ διαιρούμενο με το $x^2 - x + 1$ δίνει υπόλοιπο ίδιο με το πηλίκο, να βρείτε τις τιμές των $\kappa, \lambda \in \mathbb{Z}$.
4. Για $\kappa = 2$ και $\lambda = -10$, επιπλέον δίνεται το πολυώνυμο:
 $R(x) = \mu x^4 + P(x) + 2Q(x) + 5(5x^2 - 7x + 4) + \nu x$ το οποίο έχει παράγοντα το $x^2 + x - 2$.
Να βρείτε τις τιμές των $\mu, \nu \in \mathbb{R}$
5. Για $\mu = \nu = 1$, να λυθεί η ανίσωση: $R(x) \leq 0$

(Μονάδες 3+3+5+8+6)

ΘΕΜΑ 3^ο

Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \alpha + \beta \eta \mu 2x$ διέρχεται από τα σημεία $M\left(\frac{31\pi}{12}, 2\right)$

και $N\left(\frac{53\pi}{12}, 4\right)$, τότε:

1. Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 2$
2. Να βρείτε τη περίοδο καθώς και τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .
3. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο $[0, \pi]$
4. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $[-\pi, \pi]$
5. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 3 + 2 \sigma \nu \left(-2x + \frac{3\pi}{4}\right)$

(Μονάδες 6+4+4+4+7)

ΘΕΜΑ 4^ο

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{2 \ln x + 1}{2 \ln x - 1}$

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
2. Να βρείτε πότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται κάτω από τον άξονα $x'x$.
3. Να λυθεί η εξίσωση: $e^{5xf(e^{-2})} \cdot e^{x^2+4f(-1)} = \left(\frac{1}{e^3}\right)^{-x}$
4. Να δείξετε ότι: $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{f(x)}$
5. Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{10}{3}$

(Μονάδες 5+4+4+5+7)