

ΘΕΜΑ Α.

- A1. β
A2. γ
A3. β
A4. δ
A5. α – ΣΩΣΤΟ
β – ΛΑΘΟΣ
γ – ΣΩΣΤΟ
δ – ΛΑΘΟΣ
ε – ΛΑΘΟΣ

ΘΕΜΑ Β

B1. iii

Ακίνητος παρατηρητής και πηγή που απομακρύνθηκε από αυτόν:

$$f_1 = \frac{u_{nx}}{u_{nx} + u_{\tau\rho}} \cdot f_s = \frac{u_{\pi x}}{u_{nx} + \frac{u_{nx}}{10}} \cdot f_s = \frac{u_{nx}}{\frac{11u_{nx}}{10}} \cdot f_s$$

$$\text{Άρα } f_1 = \frac{10}{11} \cdot f_s$$

Υπολογίζουμε τη συχνότητα του ήχου που προσπίπτει στο βράχο, θεωρώντας φανταστικό ακίνητο παρατηρητή στο βράχο και πηγή που τον πλησιάζει:

$$f_{\beta\rho\acute{\alpha}\chi\omicron\nu} = \frac{u_{nx}}{u_{nx} - u_{\tau\rho}} \cdot f_s = \frac{10}{9} \cdot f_s$$

Ο βράχος λειτουργεί ως δευτερογενής πηγή ηχητικών κυμάτων με συχνότητα $f_{\beta\rho\acute{\alpha}\chi\omicron\nu}$. Ο παρατηρητής και η πηγή-βράχος είναι ακίνητοι, άρα:

$$f_2 = f_{\beta\rho\acute{\alpha}\chi\omicron\nu} = \frac{10}{9} f_s$$

$$\text{Άρα: } \frac{f_1}{f_2} = \frac{\frac{10}{11} f_s}{\frac{10}{9} f_s} = \frac{9}{11}$$

B2. i

Η εξίσωση του στάσιμου είναι της μορφής:

$$y = 2A \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x}{\lambda} \cdot \eta\mu \frac{2\pi t}{T}$$

Το πλάτος ταλάντωσης του σημείου Μ με $x_M = \frac{9\lambda}{8}$ είναι:

$$A'_M = 2A \cdot \left| \sigma\upsilon\nu \frac{2\pi x_M}{\lambda} \right| = 2A \cdot \left| \sigma\upsilon\nu \left(\frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{9\lambda}{8} \right) \right|$$

$$A'_M = 2A \cdot \left| \sigma\upsilon\nu \frac{9\pi}{4} \right| = 2A \frac{\sqrt{2}}{2} = A\sqrt{2}$$

Το μέτρο της μέγιστης ταχύτητας του σημείου Μ είναι:

$$v_{\max} = \omega \cdot A_M = \frac{2\pi}{T} \cdot A\sqrt{2}$$

B3. ii

Εφαρμόζουμε την εξίσωση συνέχειας για το ρευστό μεταξύ των σημείων Α και Β:

$$\left. \begin{aligned} A_A \cdot u_A &= A_B \cdot u_B \\ \Deltaίνεται \quad A_A &= 2A_B \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2A_B u_A = A_B u_B$$

$$\text{Άρα ισχύει: } u_B = 2u_A \quad (1)$$

Εφαρμόζουμε την εξίσωση Bernoulli κατά μήκος της ρευματικής γραμμής ΑΒ, θεωρώντας ως επίπεδο αναφοράς το οριζόντιο επίπεδο στο οποίο ανήκει η γραμμή ΑΒ:

$$P_A + \frac{1}{2} \rho u_A^2 + 0 = P_B + \frac{1}{2} \rho u_B^2 \quad (2)$$

Λόγω της σχέσης (1), η (2) γίνεται:

$$P_A + \frac{1}{2} \rho u_A^2 = P_B + \frac{1}{2} \rho \cdot 4u_A^2$$

$$\text{ή } P_A - P_B = 4 \frac{1}{2} \rho u_A^2 - \frac{1}{2} \rho u_A^2$$

$$\text{ή } P_A - P_B = 3 \cdot \frac{1}{2} \rho u_A^2 \quad (3)$$

Ο ορισμός της πυκνότητας ρευστού είναι: $\rho = \frac{\Delta_m}{\Delta V}$. Άρα η κινητική ενέργεια ανά μονάδα

όγκου στο σημείο Α είναι:

$$\Lambda = \frac{\frac{1}{2} \Delta_m \cdot u_A^2}{\Delta V} = \frac{1}{2} \rho u_A^2$$

Οπότε, η σχέση (3) γίνεται:

$$P_A - P_B = 3\Lambda$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας (ή το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας) για το σώμα Σ₁, από το Α ως το Γ.

Η μόνη δύναμη που εκτελεί έργο είναι το βάρος:

$$K_{(\Gamma)} - K_{(A)} = W_{\text{βάρους}}$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_r^2 - 0 = m_1 g R \quad \text{άρα } u_r = \sqrt{2gR} = 10 \text{ m/s}$$

Γ2. Για την κίνηση του σώματος Σ₁, από το Γ ως το Δ ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N_1 = m_1 g$$

$$\text{Τριβή ολίσθησης: } T_1 = \mu N_1$$

$$\text{Άρα } T_1 = \mu \cdot m_1 g$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου – ενέργειας για το σώμα Σ₁ από το Γ ως το Δ:

$$K_{\Delta} - K_{\Gamma} = W_{\text{ΤΡΙΒΗΣ}}$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_{\Delta}^2 - \frac{1}{2} m_1 u_{\Gamma}^2 = -T \cdot S_1$$

$$\frac{1}{2} m_1 u_{\Delta}^2 - \frac{1}{2} m_1 u_{\Gamma}^2 = -\mu \cdot m_1 g S$$

$$u_{\Delta} = \sqrt{u_{\Gamma}^2 - 2\mu g S_1} = \sqrt{10^2 - 2 \cdot 0,5 \cdot 10 \cdot 3,6} = 8 \text{ m/s}$$

Έχουμε κεντρική και ελαστική κρούση, άρα ισχύουν οι σχέσεις:

$$u_1' = \frac{(m_1 - m_2)u_{\Delta} + 2m_2 u_2}{m_1 + m_2} = \frac{-2m_1 \cdot 8 + 6m_1(-4)}{4m_1}$$

$$\text{Άρα } u_1' = \frac{-16m_1 - 24m_1}{4m_1} = -10 \text{ m/s}$$

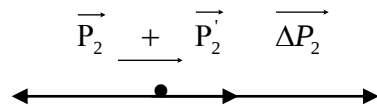
$$u_2' = \frac{(m_2 - m_1)u_2 + 2m_1 u_{\Delta}}{m_1 + m_2} = \frac{2m_1 \cdot (-4) + 2m_1 \cdot 8}{4m_1}$$

$$\text{Άρα } u_2' = \frac{-8m_1 + 16m_1}{4m_1} = 2 \text{ m/s}$$

Γ3. Θεωρούμε ως θετική τη φορά προς τα δεξιά. Το μέτρο της μεταβολής της ορμής για το Σ_2 είναι:

$$|\Delta P_2| = |m_2 u_2' - m_2 u_2| = |3 \cdot 2 - 3 \cdot (-4)| = |6 + 12| = 18 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Η κατεύθυνση του $\overrightarrow{\Delta P_2}$ προσδιορίζεται από το ακόλουθο σχήμα:



ή αλγεβρικά:

$$\Delta P_2 = P_2' - P_2 = 6 - (-12) = +18 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

Άρα η κατεύθυνση του $\overrightarrow{\Delta P_2}$ είναι προς τα δεξιά.

Γ4. Η αρχική κινητική ενέργεια του σώματος Σ_1 είναι:

$$K_1 = \frac{1}{2} m_1 u_1^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 8^2 = 32 \text{ J}$$

Η τελική κινητική ενέργεια του σώματος Σ_2 είναι:

$$K_1' = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-10)^2 = 50 \text{ J}$$

Ποσοστό μεταβολής της κινητικής ενέργειας:

$$\frac{\Delta K_1}{K_1} \cdot 100\% = \frac{50 - 32}{32} 100\% = \frac{18}{32} \cdot 100\% = \frac{900}{16} \% = 56,25\%$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Ισορροπία ροπών για τον κύλινδρο, ως προς το σημείο επαφής του κυλίνδρου με το δάπεδο:

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow w_x \cdot R - T_v \cdot 2R = 0$$

$$\Rightarrow T_v = \frac{w_x}{2} = \frac{Mg \cdot \eta \mu \phi}{2} = 5 \text{ N}$$

Ισορροπία δυνάμεων για το σώμα Σ, στη διεύθυνση x'x παράλληλα στο δάπεδο:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w_x + T_y = mg \eta \mu \phi + T_v$$

$$\Rightarrow F_{ελ} = 5 + 5 = 10N$$

Σύμφωνα με το νόμο του Hooke:

$$F_{ελ} = k \cdot \Delta l_0 \Rightarrow \Delta l_0 = \frac{F_{ελ}}{k} = \frac{10}{100} = 0,1m$$

Δ2. Τη χρονική στιγμή $t=0$ που κόβεται το νήμα, η ταχύτητα του Σ είναι $u=0$, άρα το σώμα Σ βρίσκεται στην κατώτερη ακραία θέση της ταλάντωσής του. Θεωρούμε ως θετική τη φορά προς τα πάνω, άρα:

$$t_0 = 0 = x_0 = -A \Rightarrow \eta\mu\phi_0 = -1$$

$$\text{Ισχύει } 0 \leq \phi_0 < 2\pi, \text{ άρα } \phi_0 = \frac{3\pi}{2} \text{ rad}$$

Το σώμα εκτελεί αατ με $D=k$, άρα:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{100}{1}} = 10 \text{ rad/s}$$

Η θέση ισορροπίας της ταλάντωσης που εκτελεί το Σ προσδιορίζεται από τη σχέση:

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_{ελ} = w_x \Rightarrow k \cdot \Delta l_{ισ} = mg \eta\mu\phi \Rightarrow \Delta l_{ισ} = \frac{5}{100} = 0,05m$$

Άρα το πλάτος της ταλάντωσης προκύπτει:

$$A = \Delta l_0 - \Delta l_{ισορ} = 0,1 - 0,05 = 0,05m$$

Οπότε η χρονική εξίσωση της απομάκρυνσης είναι:

$$x = A \cdot \eta\mu(\omega t + \phi_0) = 0,05 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Και η χρονική εξίσωση της δύναμης επαναφοράς είναι:

$$F_{επαν} = -kx = -100 \cdot 0,05 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) = -5 \cdot \eta\mu\left(10t + \frac{3\pi}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

Δ3. Για την κύλιση του κυλίνδρου στο επίπεδο, εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής:

$$\Sigma F_x = M \cdot a_{CM} \Rightarrow Mg \eta\mu\phi - Ts = M \cdot a_{CM} \quad (1)$$

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_s \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

Ισχύει: $R \cdot a_{\gamma\omega\nu} = a_{CM}$ επειδή ο κύλινδρος κυλάει χωρίς να ολισθαίνει

$$(2) \Rightarrow T_s = \frac{1}{2} M \cdot a_{CM} \quad (3)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (3):

$$Mg \eta\mu\phi = \frac{3}{2} M \cdot a_{CM} \Rightarrow a_{CM} = \frac{2}{3} g \eta\mu\phi = \frac{10}{3} \text{ m/s}^2$$

$$\text{Πλήθος περιστροφών: } N = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow \theta = N \cdot 2\pi = \frac{12}{\pi} \cdot 2\pi \Rightarrow \theta = 24 \text{ rad}$$

Λόγω της συνθήκης για κύλιση χωρίς ολίσθηση:

$$x_{CM} = \theta \cdot R \Rightarrow x_{CM} = 24 \cdot 0,1 = 2,4m$$

Η κίνηση της συνθήκης για κύλιση χωρίς ολίσθηση:

$$x_{CM} = \frac{1}{2} a_{CM} \cdot t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2x_{CM}}{a_{CM}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 2,4}{\frac{10}{3}}} = \sqrt{1,44} = 1,2s$$

$$u_{CM} = a_{CM} \cdot t = \frac{10}{3} \cdot 1,2 = 4 \text{ m/s}$$

$$\text{και } \omega = \frac{u_{CM}}{R} = \frac{4}{0,1} = 40 \text{ rad/s}$$

Άρα η στροφορμή του κυλίνδρου είναι:

$$L = I \cdot \omega = 0,01 \cdot 40 = 0,4 \text{ kg m}^2/\text{s}$$

$$\text{Όπου } I = \frac{1}{2} MR^2 = \frac{1}{2} 2 \cdot 0,1^2 = 0,01 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$\Delta 4. \text{ Για } t=3\text{s} : \quad v_{cm} = a_{cm} \cdot t = \frac{10}{3} \cdot 3 = 10 \text{ m/s}$$

$$\omega = \frac{v_{cm}}{R} = \frac{10}{0,1} = 100 \text{ rad/s}$$

Ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου:

$$\begin{aligned} \frac{dK}{dt} &= \frac{dK_{\mu\epsilon\tau}}{dt} + \frac{dK_{\pi\epsilon\rho}}{dt} = \frac{\Sigma F_x \cdot dx_{cm}}{dt} + \frac{\Sigma \tau \cdot d\theta}{dt} = \Sigma F_x \cdot u_{CM} + \Sigma \tau \cdot \omega = \\ &= M a_{cm} v_{cm} + I \cdot a_{\gamma\omega\nu} \cdot \omega = \frac{200}{3} + \frac{100}{3} = 100 \text{ J/s} \end{aligned}$$