**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2016**

**ΘΕΜΑ Α**

Α1. Απόδειξη σχολικου βιβλίου σελίδα 262

Α2. Ορισμός σχολικό βιβλίο σελίδα 141

Α3. Ορισμός σχολικό βιβλίο σελίδα 246-247

Α4. α)ΛΑΘΟΣ σελ. 334

β) ΣΩΣΤΟ σελ. 166

γ) ΛΑΘΟΣ σελ. 251

δ) ΣΩΣΤΟ σελ. 152

ε) ΣΩΣΤΟ σελ.195

**ΘΕΜΑ Β**

f(x)= $\dfrac{x^2}{x^2+1}$

Β1. $f'(x)=\dfrac{2x(x^2+1)-2x\cdot x^2}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x(x^2+1-x^2)}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

| | | 0 | |
|---|---|---|---|
| f' | - | 0 | + |
| f | ↘ | | ↗ |

0
Ο.Ε

Στο $(-\infty,0)$ η f'<0
Και η f συνεχής στο $(-\infty,0]$ } η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,0]$

Στο (0,+$\infty$) η f΄>0 και η f συνεχής στο [0,+ $\infty$)

Η f γνησίως αύξουσα στο [0, $\infty$)

$f(0)=\dfrac{0^2}{0^2+1}=0$ , το (0,0) ολικό ελάχιστο

B2. $f''(x)=\dfrac{(2x)'(x^2+1)^2-2x\left[(x^2+1)^2\right]'}{(x^2+1)^4}=\dfrac{2(x^2+1)^2-2x\cdot 2(x^2+1)2x}{(x^2+1)^4}$

$=\dfrac{(x^2+1)\cdot[2(x^2+1)-8x^2]}{(x^2+1)^4}=\dfrac{[2(x^2+1)-8x^2]}{(x^2+1)^3}$

$\dfrac{2x^2+2-8x^2}{(x^2+1)^3}=\dfrac{2-6x^2}{(x^2+1)^3}=\dfrac{2(1-3x^2)}{(x^2+1)^3}$

| x | $-\infty$ | | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f''(x) | | − | 0 | + | 0 | − | |
| f | | ∩ | Σ.Κ. | ∪ | Σ.Κ. | ∩ | |

¼ ¼

$f\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)=\dfrac{1/3}{\frac{1}{3}+1}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{4}$

$f\left(\sqrt{3}/3\right)=\dfrac{1/3}{\frac{1}{3}+1}=\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{4}{3}}=\dfrac{1}{4}$

B3. Η f επειδή είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες.

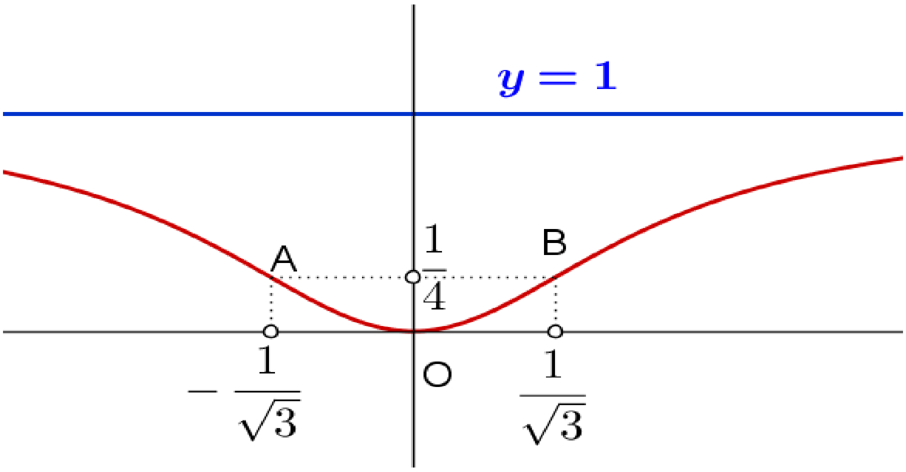
$$\left.\begin{aligned}&\lambda=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^3+x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0\\ &\beta=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-0x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2+1}=1\end{aligned}\right\}$$

y=0x+1

άρα η ε: y=1 οριζόντια ασύμπτωτη $+\infty$

Ομοίως στο $-\infty$

B4.




**ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. $e^{x^2}-x^2-1=0$

Θεωρώ $g(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in R$

$g(0)=0$

$g'(x)=e^{x^2}\cdot 2x-2x=2x\left(e^{x^2}-1\right)$

| x | $-\infty$ | 0 $\quad +\infty$ |
|---|---|---|
| 2x | - | + |
| $e^{x^2}-1$ | + | + |
| g'(x) | - | + |
| g(x) | ↘ | ↗ |

0

Ο.Ε.

Και $\forall x\in R\ g(x)\geq g(0)$

Με το «=» να ισχύει για x=0.

Γ2.

$f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)\Leftrightarrow |f(x)|=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|$

$f(x)=e^{x^2}-x^2-1,\ x\in R$

$f(x) = -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right),\ x \in R$

$$f(x) = \begin{cases} e^{x^2} - x^2 - 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -\left(e^{x^2} - x^2 - 1\right), & x < 0 \end{cases}$$

$$f(x) = \begin{cases} -e^{x^2} - x^2 - 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ e^{x^2} - x - 1, & x < 0 \end{cases}$$

Γ3.

Η f΄ είναι παραγωγίσιμη στο R

Με $f''(x) = 2\left(e^{x^2} - 1\right) + 2x \cdot \left(e^{x^2} \cdot 2x\right) = 2\left(e^{x^2} - 1\right) + 4x^2 \cdot e^{x^2} =$

$= 2\left(e^{x^2} - 1 + 2x^2 \cdot e^{x^2}\right) = 2\left(e^{x^2} + 2x^2 e^{x^2} - 1\right), x \in R$

Πρόσημο f΄΄

$f''(x) > 0$ άρα $e^{x^2} + 2x^2 \cdot e^{x^2} - 1 > 0$

Θεωρώ

φ(x)= $e^{x^2}\left(1 + 2x^2\right) - 1$

φ $(x) = e^{x^2} 2x\left(1 + 2x^2\right) + e^{x^2} \cdot 4x = e^{x^2} \cdot 2x\left(1 + 2x^2 + 2\right) = 2e^{x^2} x\left(2x^2 + 3\right) \geq 0,\ x \in R$

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| φ΄(x) | - | 0 | + |
| φ (x) | ↘ | | ↗ |

0
Ο.Ε

φ(0)=0 άρα $\phi(x) \geq \phi(0) \Leftrightarrow \phi(x) \geq 0 \quad για \quad κάθε \quad x \in R$

Άρα $f''(x) \geq 0$ στο R και επειδή f΄΄ είναι συνεχής στο 0 οπότε η f κυρτή στο R.

Γ4.

Θεωρώ τη συνάρτηση $\kappa(x)=f(x+3)-f(x)$, $x\geq 0$

Άρα η εξίσωση γράφεται

$\kappa(|\eta\mu x|)=\kappa(x)$ (1)

Έχω $\kappa'(x)=f'(x+3)-f'(x)>0$, $x\in R$, αφού η f είναι κυρτή στο R, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα.

Με $x+3>x \Leftrightarrow f'(x+3)>f'(x) \Leftrightarrow f'(x+3)-f'(x)>0$

Άρα η κ είναι 1-1. Επομένως $(1)\Leftrightarrow |\eta\mu x|=x \Leftrightarrow x=0$ (μοναδική ρίζα στο $[0,+\infty)$)

**ΘΕΜΑ Δ**

Δ1. $\int_0^\pi (f(x)+f''(x))\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow \int_0^\pi f(x)\eta\mu x dx+\int_0^\pi f''(x)\eta\mu x dx=\pi \Leftrightarrow$

$[-\sigma\upsilon\nu x\cdot f(x)]_0^\pi-\int_0^\pi f'(x)(-\sigma\upsilon\nu x)dx+f'(\pi)\eta\mu\pi-f'(0)\eta\mu 0-\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x fx=\pi \Leftrightarrow$

$-\sigma\upsilon\nu\pi f(\pi)-(-\sigma\upsilon\nu 0 f(0))+\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx+f'(\pi)\eta\mu\pi-f'(0)\eta\mu 0-\int_0^\pi f'(x)\sigma\upsilon\nu x dx=\pi \Leftrightarrow$

$-(-1)\cdot f(\pi)+f(0)=\pi \Leftrightarrow f(\pi)+f(0)=\pi$ (1)

$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}=1$ (υπόθεση)

$f(0)=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}\eta\mu x=1\cdot\eta\mu 0=0$ (f συνεχής στο $x_0=0$)

Άρα $(1)$: $f(\pi)+0=\pi \Leftrightarrow f(\pi)=\pi$

$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{\eta\mu x}\cdot\frac{\eta\mu x}{x}=1\cdot 1=1$ (υπόθεση f παραγωγίσιμη)

Δ2. Α) Έστω $x_0\in R$, θέση για ακρότατο, άρα $f'(x_0)=0$ (1). Παραγωγίζω τη σχέση της υπόθεσης και προκύπτει:

$e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'(f(x)) \cdot f'(x) + e^x$, $x \in R$

Θέτω όπου x=$x_0$, άρα

$e^{f(x_0)} \cdot f'(x_0) + 1 = f'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) + e^{x_0}$

Λόγω της (1), έχω από την τελευταία

$1 = e^{x_0}$, άρα $x_0$=0.

Έτσι $(1)$: $f'(0) = 0$, άτοπο αφού από Δ1, έχω $f'(0) = 1$

B) παραγωγίζοντας τη σχέση της υπόθεσης έχω

$e^{f(x)} \cdot f'(x) + 1 = f'(x) f'(f(x)) + e^x$

Έστω $\kappa \in R$, με $f'(\kappa) = 0$. Θέτω στην προηγούμενη ισότητα και προκύπτει.

$e^{\kappa} = 1 \Leftrightarrow \kappa = 0$. Άρα $f'(0) = 0$, άτοπο από Δ1.

Άρα $f'(x) \neq 0$ και συνεχής. Επομένως η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο R. Με $f'(0) = 1 > 0$, έχω $f'(x) > 0, x \in R$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο R.

Δ3. Έχω σε περιοχή του $+\infty$

$$\left| \frac{\eta\mu x}{f(x)} \right| \leq \left| \frac{1}{f(x)} \right| \Leftrightarrow$$

$$-\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\eta\mu x}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|}$$

Από Δ2. Β f γνησίως αύξουσα και συνεχής.

Άρα $f(R) = \left( \lim_{x \to -\infty} f(x), \lim_{x \to +\infty} f(x) \right)$

$= (-\infty, +\infty)$ άρα $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

Άρα $\lim_{x \to +\infty} \left( -\frac{1}{|f(x)|} \right) = 0 = \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{|f(x)|}$

Άρα $\lim_{x \to +\infty} \frac{\eta\mu x}{f(x)} = 0$

Ομοίως $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right| \leq \left|\frac{1}{f(x)}\right| \Leftrightarrow -\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)} \leq \frac{1}{|f(x)|}$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{|f(x)|}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{|f(x)|} = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = 0$

Άρα $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{f(x)} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\eta\mu x}{f(x)} + \frac{\sigma\upsilon\nu x}{f(x)}\right) = 0 + 0 = 0$

Δ4.

Από Δ1 έχω $f(0)=0$ και f γνησίως αύξουσα άρα x>0, έχω $f(x) > f(0) = 0$. Στη σχέση που ζητείται θέτω $\ln x = u$, $x = e^u$, άρα $dx = e^u du$ και με x=1, έχω $e^u = 1$, άρα u=0.

Με $x = e^{\pi}$, έχω $e^{\pi} = e^u$, άρα u=π

Άρα ζητούμενο

$$0 < \int_0^{\pi} \frac{f(u)}{e^u} \cdot e^u du < \pi^2$$

Δηλαδή $0 < \int_0^{\pi} f(u) du < \pi^2$

Με $f(0)=0$ από Δ1 και x>0, έχω $f(x) > f(0) = 0$, άρα $\int_0^{\pi} f(u) du > 0$.

Επίσης $x \leq \pi \Leftrightarrow f(x) \leq f(\pi)$, άρα $\pi - f(x) \geq 0$, με το ίσο να ισχύει μόνο για x=π. Άρα $\int_0^{\pi}[\pi - f(x)]dx > 0 \Leftrightarrow \int_0^{\pi}\pi dx > \int_0^{\pi} f(x)dx \Leftrightarrow \pi(\pi - 0) > \int_0^{\pi} f(x)dx \Leftrightarrow \pi^2 > \int_0^{\pi} f(x)dx$