

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2009
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

ΘΕΜΑ 1^ο

A. σχ. βιβλίο: απόδειξη 1 σελ. 150

B. σχ. βιβλίο: σελ. 65 Αν διαιρέσουμε....

Γ. Λ, Σ, Λ, Σ, Σ

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\bar{x} = 4$$

$$\alpha) \bar{x} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^4 x_i v_i = \frac{x_1 \cdot v_1 + x_2 v_2 + x_3 \cdot v_3 + x_4 v_4}{v} = \frac{2 \cdot 6 + 3x + 5 \cdot 3 + 8 \cdot 4}{6 + x + 3 + 4}$$
$$4 = \frac{12 + 3x + 15 + 32}{13 + x} \Rightarrow 52 + 4x = 59 + 3x \Rightarrow 4x = 3x + 7 \Rightarrow x = 7$$

Άρα $v_2 = 7$

β) $v = 20$

$$S^2 = \frac{1}{v} \cdot \sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i = \frac{1}{20} [(2-4)^2 6 + (3-4)^2 7 + (5-4)^2 3 + (8-4)^2 4]$$
$$= \frac{4 \cdot 6 + 1 \cdot 7 + 1 \cdot 3 + 16 \cdot 4}{20} = \frac{24 + 7 + 3 + 64}{20}$$
$$= \frac{98}{20} = 4,9$$

$$\gamma) CV = \frac{s}{|x|} = \frac{\sqrt{4,9}}{4} \approx \frac{2,2}{4} = 0,55 > 0,1$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

ΘΕΜΑ 3^ο

α) $f'(x) = 3x^2 - 12x + a$, $f''(x) = 6x - 12$ άρα

$$2f''(x) + f'(x) + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow 2(6x - 12) + 3x^2 - 12x + a + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow$$

$$12x - 24 + 3x^2 - 12x + a + 15 = 3x^2 \Leftrightarrow a - 9 = 0 \Leftrightarrow a = 9$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 12x + 9}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x^2 - 4x + 3)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)(x-3)}{(x-1)(x+1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-3)}{x+1} = -3.$$

γ) Έστω ε η εφαπτομένη στο σημείο $A(x_0, f(x_0))$, με $\varepsilon \parallel \delta: y = -3x$ θα είναι

$$\lambda_\varepsilon = f'(x_0) = -3, \text{ άρα}$$

$$3x^2 - 12x_0 + 9 = -3 \Leftrightarrow 3x_0^2 = 12x_0 + 12 = 0 \Leftrightarrow x_0^2 - 4x_0 + 4 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 2$$

- Αν $x_0 = 2$ τότε $f(2) = 2^3 - 6 \cdot 2^2 + 9 \cdot 2 - 7 = 8 - 24 + 18 - 7 = -5$ και $f'(2) = -3$

Έστω η εφαπτομένη $(\varepsilon): y = \lambda x + \beta$ με $\lambda = f'(2) = -3$.

Έχω $y = -3x + \beta$ στο σημείο $A(2, -5)$, άρα $-5 = -3 \cdot 2 + \beta \Leftrightarrow \beta = 1$, άρα

$(\varepsilon): y = -3x + 1$

ΘΕΜΑ 4^ο

A. α) $f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} = \frac{2-x}{2x}$ με $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$, άρα με $0 < x < 2$ έχουμε

$f'(x) > 0$ και $x > 2$ έχουμε $f'(x) < 0$ δηλαδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.

β) Η f στο $x=2$, έχει θέση για ολικό μέγιστο το $f(2) = \lambda^2 - 6\lambda + 1 + \ln 2$.

B. α) Έχοντας $2 < 3 < 4 < 5 < 8$ και την f γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$ προκύπτει $f(2) > f(3) > f(4) > f(5) > f(8)$

άρα

$$R = f(2) - f(8) = \lambda^2 - 6\lambda + 1 + \ln 2 - \left(\ln 8 - \frac{8}{2} + \lambda^2 - 6\lambda + 2 \right) = 3 + \ln 2 - \ln 8 = 3 + \ln \frac{2}{8} = 3 + \ln \frac{1}{4}$$

και $\delta = f(4) = \ln 4 - \frac{4}{2} + \lambda^2 = 6\lambda + 2 = \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda$.

β) Πρέπει

$$R + \delta < -2 \Leftrightarrow 3 + \ln \frac{1}{4} + \ln 4 + \lambda^2 - 6\lambda < -2 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 + \ln \left(\frac{1}{4} \cdot 4 \right) < 0 \Leftrightarrow \lambda^2 - 6\lambda + 5 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\lambda \in (1, 5).$$

Άρα $A = \{2, 3, 4\}$, με $N(A)=3$ και $N(\Omega)=100$. Έχω $P(A) = \frac{3}{100}$.