ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σελ. 30 σχολικού βιβλίου.

Α2. Ορισμός σελ. 13 σχολικού βιβλίου.

Α3. Θεωρία σελ. 59 σχολικού βιβλίου.

Α4. α.Σ β.Λ γ.Λ δ.Λ ε.Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $n = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 12 + 8 + 14 + 6 = 40$

Β2.

Κλάσεις	x_i	v_i	f_i	$x_i v_i$
[2,4)	3	12	0,3	36
[4,6)	5	8	0,2	40
[6,8)	7	14	0,35	98
[8,10)	9	6	0,15	54
		40	1	228

Β3. α. $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i v_i}{v} = \frac{228}{40} = 5{,}7$ χιλιάδες ευρώ.

β. $\frac{6-4}{6-4{,}5} = \frac{8}{v_2{}'} \Leftrightarrow \frac{2}{1{,}5} = \frac{8}{v_2{}'} \Leftrightarrow 2v_2{}'=12 \Leftrightarrow v_2{}'=6$ άρα

$v_2{}'+v_3+v_4=6+14+6=26$ πωλητές.

Γ1. $f'(x)=12x^2-7x+1$

$\Delta=49-48$

$x_{1,2} = \frac{7 \pm 1}{24}$, $x_1= \frac{8}{24} = \frac{1}{3}$, $x_2= \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$

Με $x_1<x_2$ έχω

$P(\kappa) = \frac{1}{4}$ $P(A) = \frac{1}{3}$

P(K)+P(A)+P(Π)=1

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+P(\Pi)=1$$

$$\frac{3}{12}+\frac{4}{12}+\mathrm{P}(\Pi)=1$$

$$\frac{7}{12}+(\Pi)=1$$

$$\mathrm{P}(\Pi)=\frac{5}{12}$$

Γ2. $\mathrm{P}(\Gamma)=\mathrm{P}(\mathrm{K}\cup\mathrm{A})=\mathrm{P}(\mathrm{K})+\mathrm{P}(\mathrm{A})=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$, $A\cap K=\varnothing$ άρα $P(A\cap K)=0$

$$\mathrm{P}(\Delta)=\mathrm{P}(\mathrm{K}\cup\mathrm{A})'=1-\mathrm{P}(\mathrm{K}\cup\mathrm{A})=1-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

$$P(E)=P(A\cup\Pi')=\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\Pi')-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\Pi')=$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{A})+1-\mathrm{P}(\Pi)-(\mathrm{P}(\mathrm{A})-\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\Pi)$$

$=\mathrm{P}(\mathrm{A})+1-\mathrm{P}(\Pi)-\mathrm{P}(\mathrm{A})+\mathrm{P}(\mathrm{A}\cap\Pi)$, $A\cap\Pi=\varnothing$ άρα $P(A\cap\Pi)=0$

$$=1-\frac{5}{12}=\frac{7}{12}$$

Γ3. N(A)=N(Π)-4 Διαιρώ με το $\mathrm{N}(\Omega)\neq 0$

$$\frac{\mathrm{N}(\mathrm{A})}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{\mathrm{N}(\Pi)}{\mathrm{N}(\Omega)}-\frac{4}{\mathrm{N}(\Omega)}$$

$$\frac{1}{3}=\frac{5}{12}-\frac{4}{N(\Omega)}$$

$$4=5-\frac{48}{\mathrm{N}(\Omega)}$$

$$-1=-\frac{48}{N(\Omega)}$$

N(Ω)=48

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Αφού η βάση έχει περίμετρο $20\,dm$, τότε $2x+2y=20 \Leftrightarrow x+y=10 \Leftrightarrow y=10-x$, όπου y το πλάτος της βάσης.

Η συνολική επιφάνεια του κουτιού είναι:

- 1 ορθογώνιο με διαστάσεις $x \cdot y$
- 2 ορθογώνια με διαστάσεις $x \cdot 5$
- 2 ορθογώνια με διαστάσεις $5 \cdot y$

Επομένως $E_{ολ} = x \cdot y + 2 \cdot 5x + 2 \cdot 5y \Rightarrow$

$$\begin{aligned} \Rightarrow E(x) &= x \cdot (10-x) + 10x + 10 \cdot (10-x) = \\ &= 10x - x^2 + 10x + 100 - 10x = \\ &= -x^2 + 10x - 100 \end{aligned}$$

με $x \in (0,10)$ και $y > 0 \Leftrightarrow 10 - x > 0 \Leftrightarrow x < 10$. Άρα $x \in (0,10)$

$\boxed{E(\max)}$

	0	5	10
$E'(x)$	+	•	-
$E(x)$	↗		↘

$E'(x) = -2x + 10$

- Για $x \in (0,5)$ είναι $E'(x) > 0$, επομένως $E'(x)$ γνησίως αύξουσα.
  Άρα με $x \geq 5 \Leftrightarrow E(x) \leq E(5) = 125$.
- Για $x \in (5,10)$ είναι $E'(x) < 0$, επομένως $E'(x)$ γνησίως φθίνουσα.
  Άρα με $x \geq 5 \Leftrightarrow E(x) \leq E(5) = 125$.

Έτσι για κάθε $x \in (0,10)$ είναι $E(x) \leq E(5) = 125$.

Δηλαδή για $x = 5$ το κουτί έχει μέγιστη επιφάνεια.

$5 = x_1 < x_2 < x_3 < \ldots < x_{15} = 9$

Αφού $x_i \in (5,10)$, είναι $y_1 > y_2 > y_3 > \ldots > y_{15}$, γιατί η $E(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα.

Δ2.

α) $\bar{x} = 8$, $2s^2 - 5s + 2 = 0$

$\Delta = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 9 > 0$, Άρα $s_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2 \cdot 2} \Rightarrow s_1 = \frac{8}{4} = 2$ και $s_2 = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

- Αν $s = 2$, τότε $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} = 0{,}25 > 0{,}1$ **ΔΕΚΤΟ**
- Αν $s = \frac{1}{2}$, τότε $CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{\frac{1}{2}}{8} = \frac{1}{16} < \frac{1}{10}$ **ΑΤΟΠΟ**, γιατί το δείγμα είναι ομοιογενές

β) Είναι $s^2 = \frac{1}{\nu} \cdot [\sum_{i=1}^{15} x_i^2 - \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2}{\nu}] \overset{\mu\varepsilon\ \nu=15}{=} \frac{\sum_{i=1}^{15} x_i^2}{15} - \frac{(\sum_{i=1}^{15} x_i)^2}{15^2} = \overline{x_i^2} - \bar{x}^2$

Δηλαδή $4 = \overline{x_i^2} - 8^2 \Leftrightarrow \overline{x_i^2} = 68$

Δ3.

$B = \{y_i > -4x_i + 9R + 1\}$

$R = y_{\max} - y_{\min} = y_1 - y_{15} = E(x_1) - E(x_{15}) = E(5) - E(9) = 125 - 109 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow R = 16$

$-x_i^2 + 10x_i + 100 > -4x_i + 144 + 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_i^2 - 14x_i + 45 < 0$, η οποία αληθεύει για $x_i \in (5, 9)$

$B = \{x_2, x_3, \ldots, x_{14}\}$, $P(B) = \frac{N(B)}{N(\Omega)} = \frac{13}{15}$