

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2012
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

Θέμα Α

- A1. Θεωρία Σχολικού βιβλίου (σελ. 31)
 A2. Θεωρία Σχολικού βιβλίου (σελ. 148-149)
 A3. Θεωρία Σχολικού Βιβλίου (σελ. 96)
 A4. (α) Λ
 (β) Σ
 (γ) Λ
 (δ) Σ
 (ε) Σ

Θέμα Β

- B1. $\delta=25$ λεπτά
 B2.

Χρόνος (λεπτά)	x_i	v_i	$F_i\%$	$N_i\%$	$F_i\%$
[5,15)	10	12	20	12	20
[15,25)	20	18	30	30	50
[25,35)	30	24	40	54	90
[35,45)	40	6	10	60	100
Σύνολο	-	60	100	-	-

Αφού $\delta=25$ λεπτά ισχύει ότι $F_1\%+F_2\%=F_3\%+F_4\% \Leftrightarrow$
 $\Leftrightarrow v_1+v_2=v_3+v_4 \Leftrightarrow \alpha+4+3\alpha-6=2\alpha+8+\alpha-2 \Leftrightarrow \alpha=8$

$$B3. \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i v_i}{v} = \frac{10 \cdot 12 + 20 \cdot 18 + 30 \cdot 24 + 40 \cdot 6}{60} = 24 \text{ λεπτα}$$

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^4 (x_i - \bar{x})^2 \cdot v_i}{v} = \frac{(10-24)^2 \cdot 12 + (20-24)^2 \cdot 18 + (30-24)^2 \cdot 24 + (40-24)^2 \cdot 6}{60} =$$

84 λεπτά²

Άρα $S = \sqrt{84} \cong 9,17$ λεπτά

B4. Το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το

πρόβλημα είναι $\frac{8}{10} \cdot 10\% = 8\%$

Θεμα Γ

Έστω Γ το ενδεχόμενο είναι μαθητής να μαθαίνει Γαλλικά και Ι το ενδεχόμενο να μαθαίνει Ισπανικά

$$\text{Οπότε: } P(\Gamma) = \frac{3v}{v^2 + 1}, v \geq 3$$

$$P(I) = \frac{v+2}{v^2 + 1}, v \geq 3$$

$$\text{και } P(\Gamma \cap I) = \frac{v+1}{v^2 + 1}, v \geq 3$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(\sqrt{x^2 + 3} - 2)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)}{x(x+1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x^2 + 3 - 4)}{x(x+1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)(\sqrt{x^2 + 3} + 2)} = \frac{2(-2)}{(-1)4} = 1$$

Άρα $P(\Gamma \cup I) = 1$

Γ1. Αφού $P(\Gamma \cup I) = 1$ το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μια τουλάχιστον από τις δύο γλώσσες είναι βέβαιο ενδεχόμενο.

$$\Gamma 2. P(\Gamma \cup I) = P(\Gamma) + P(I) - P(\Gamma \cap I) \Leftrightarrow$$

$$\frac{3v + v + 2 - v - 1}{v^2 + 1} = 1 \Leftrightarrow 3v + 1 = v^2 + 1 \Leftrightarrow v^2 - 3v = 0 \Leftrightarrow v(v - 3) = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Απορρίπτεται ή $v = 3$

$$\Gamma 3. P[(\Gamma - I) \cup (I - \Gamma)] = P(\Gamma) - P(\Gamma \cap I) + P(I) - P(\Gamma \cap I) = \frac{9}{10} + \frac{5}{10} - 2 \cdot \frac{4}{10} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

$$\Gamma 4. P(\Gamma \cap I) = \frac{4}{10} \text{ ή } 40\%$$

Άρα αφού 32 μαθητές είναι το 40% των μαθητών έχουμε ότι: $v = \frac{32 \cdot 100}{40} = 80 \text{ μαθητές}$

Θέμα Δ.

$$\Delta 1. f'(x) = \frac{(1 + \ln^2 x)' \cdot x - (1 + \ln^2 x)}{x^2} = \frac{2 \ln x}{x} x - 1 - \ln^2 x = \frac{2 \ln x - 1 - \ln^2 x}{x^2} =$$
$$-\frac{(\ln^2 x - 2 \ln x + 1)}{x^2} = -\frac{(\ln x - 1)^2}{x^2} \leq 0$$

$x > 0$, άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0, +\infty)$

$\Delta 2. M(x, f(x))$ έχω $f(x) > 0, x > 0$

$$E(x) = (OKM\Lambda) = (OK) \cdot (O\Lambda) = x \cdot f(x) = x \cdot \frac{1 + \ln^2 x}{x} = 1 + \ln^2 x, x > 0$$

$$E'(x) = (1 + \ln^2 x)' = 2 \frac{\ln x}{x},$$

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} \ln x = 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow x = 1$$

Και $E'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$

$$E'(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$E(1) = 1 + \ln^2 1 = 1$ και τότε έχω (ΟΚ)= $x=1$,

(ΟΛ) = $f(1) = \frac{1 + \ln^2 1}{1} = 1 = (\text{ΟΚ})$, άρα ΟΚΜΛ τετράγωνο.

Δ3. $\lambda = f'(1) = -\frac{(\ln 1 - 1)^2}{1^2} = -1$, άρα $\varepsilon: y = -x + \beta$, $\beta \neq 10$

$$\bar{x} = 10 \Leftrightarrow 10 = \frac{\sum_{i=1}^{10} x_i}{10} \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{10} x_i = 100$$

$$S_x = 2$$

Έχω $Y = -x + \beta$ και $y_i = -x_i + \beta$, άρα

$$\begin{aligned} \bar{y} &= \frac{\sum_{i=1}^{10} y_i}{10} = \frac{y_1 + y_2 + \dots + y_{10}}{10} = \frac{(-x_1 + \beta) + \dots + (-x_{10} + \beta)}{10} \\ &= \frac{-\sum_{i=1}^{10} x_i + 10\beta}{10} = \frac{-100 + 10\beta}{10} = -10 + \beta \end{aligned}$$

Έχω $S_y = |-1| S_x = 1 \cdot 2 = 2$

Άρα $CV_y = \frac{S_y}{|\bar{y}|} = \frac{2}{|-10 + \beta|}$

Πρέπει $\frac{2}{|-10 + \beta|} \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow |-10 + \beta| \geq 20$

$$-10 + \beta \leq -20 \Leftrightarrow \beta \leq -10 \text{ ή}$$

$$-10 + \beta \geq 20 \Leftrightarrow \beta \geq 30$$

Δ4.

$$A \neq \emptyset,$$

$$\emptyset \neq A \subseteq A \cup B$$

άρα $0 < P(A) \leq P(A \cup B)$ και f γνησίως φθίνουσα, άρα $f(P(A)) \geq f(P(A \cup B))$ (1)

και $A \cap B \neq \emptyset$

$$\emptyset \neq A \cap B \subseteq A \cup B$$

άρα $0 < P(A \cap B) \leq P(A \cup B)$

Άρα $f(P(A \cap B)) \geq f(P(A \cup B))$ (2)

Έχω (1)+(2):

$$f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$$