ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2011
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχ. βιβλίο (σελ. 152)
Α2. Σχ. βιβλίο (σελ. 142)
Α3. Σχ. βιβλίο (σελ. 65-66)
Α4. α) Λ, β) Λ, γ)Σ, δ) Λ, ε) Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $P(M)=\frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{N(M)}}{\mathrm{N}(\Omega)}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow N(M)=\frac{N(\Omega)}{4}$

Επειδή Ν(Μ), Ν(Ω)$\in \mathrm{N}$ και από τις πιθανές τιμές του Ν(Ω) η μόνη που είναι πολλαπλάσιο του 4 είναι 68, έχω ότι Ν(Ω)=68.

Β2. P(A)+P(M)+P(K)=1 $\Leftrightarrow 4\lambda^2+\frac{1}{4}+\left(-5\lambda+\frac{7}{4}\right)=1 \Leftrightarrow 16\lambda^2+1-20\lambda+7=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 16\lambda^2 - 20\lambda+4=0 \Leftrightarrow 4\lambda^2 - 5\lambda+1=0 \Leftrightarrow \lambda_1=1$ ή $\lambda_2=\frac{1}{4}$

- Για λ=1: P(A)=4>1. Άρα λ=1 απορρίπτεται
- Για $\lambda=\frac{1}{4}$: P(A)=$\frac{1}{4}$, $\mathrm{P(K)}=\frac{1}{2}$. Άρα $\lambda=\frac{1}{4}$ δεκτή.

Β3. $P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow N(A)=\frac{N(\Omega)}{4}=\frac{68}{4}=17$

$P(M)=\frac{N(M)}{N(\Omega)}=\frac{1}{4} \Leftrightarrow N(M)=17$

$P(K)=\frac{N(K)}{N(\Omega)}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow N(K)=\frac{N(\Omega)}{2}=\frac{68}{2}=34$

΄Αρα το κουτί περιέχει 17 άσπρες, 17 μαύρες και 34 κόκκινες μπάλες.

Β4. Επειδή τα ενδεχόμενα Α, Μ είναι ασυμβίβαστα από τον απλό προσθετικό νόμο έχουμε ότι:

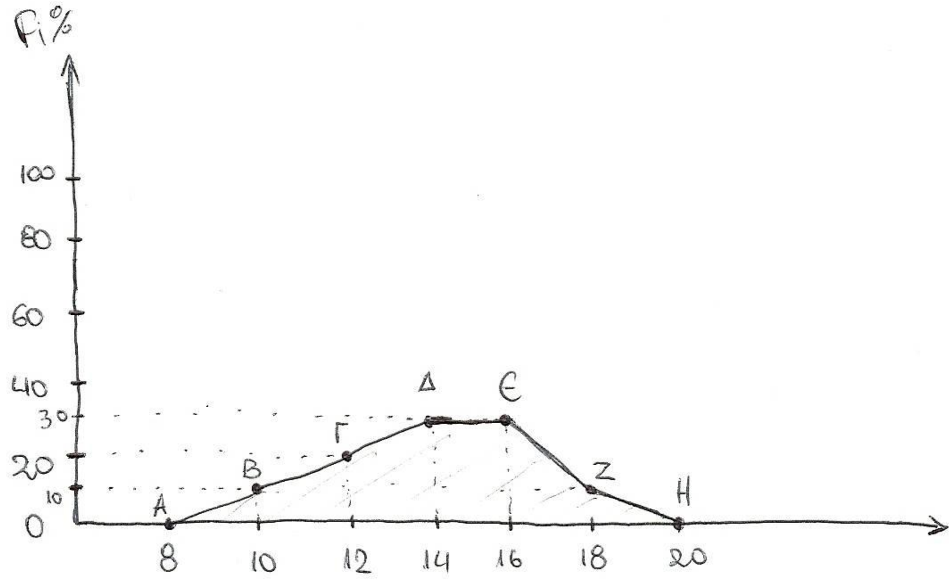
$P(A \cup M)=P(A)+P(M)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Από τις κορυφές του πολυγώνου συμπεραίνουμε ότι:
x_1=10, x_2=12, x_3=14, x_4=16, x_5=18 και
f_1%=10, f_2%=20, f_3%=y_Δ, f_3%=y_E, f_5%=10
Επειδή όμως ΔΕ//προς τον οριζόντιο άξονα ισχύει ότι y_Δ=y_E(1)

Ακόμη: $\sum_{i=1}^{5} f_i\% = 100 \Leftrightarrow 40 + y_\Delta + y_E = 100 \Leftrightarrow$

Γ2.



$$\Leftrightarrow 2y_\Delta = 60 \Leftrightarrow y_\Delta = 30 = y_E$$

Γ3.
Παρατηρώ ότι η διαφορά των κεντρικών τιμών είναι μίση με 2. Άρα το πλάτος κάθε κλάσης είναι ίσο με 2. Επομένως αφού η 1^η κλάση έχει ως κεντρική τιμή το 10 θα έχω ως 1^η κλάση: [9,11)

2^η κλάση: [11, 13) κλπ

Ετήσιες πωλήσεις σε χιλ. €	x_1	$f_1\%$
[9,11)	10	10
[11,13)	12	20
[13,15)	14	30
[15,17)	16	30
[17,19)	18	10
Σύνολο	——	100

Γ4. Από τον πίνακα κατανομής σχ. συχνοτήτων προκύπτει ότι οι πωλητές με ετήσιες πωλήσεις τουλάχιστον 15.000€ ανήκουν στην 4^η και στην 5^η κλάση. Άρα το ποσοστό που τους αντιστοιχεί είναι: $f_4\% + f_5\%$ =30+10=40%

Γ5. Το εμβαδόν του πολυγώνου συχνοτήτων ισούται με το πλήθος των πωλητών. Δηλαδή Ε=ν=80 πωλητές.

Άρα από το Γ4 οι πωλητές που δικαιούνται το εφάπαξ είναι $80\frac{40}{100} = 32$ πωλητές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x)=e^{\frac{1}{3}x\cdot\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}$, $x\in R$

$$f'(x)=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\cdot\left[\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)\right]'$$

$$f'(x)=e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\left[\frac{1}{3}\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)+\frac{1}{3}x\left(2x-\frac{11}{10}\right)\right]$$

$$f'(x)=\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}\cdot\left(3x^2-\frac{11}{5}x+\frac{2}{5}\right),\ x\in R$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 3x^2-\frac{11}{5}x+\frac{2}{5}=0\Leftrightarrow x_1=\frac{1}{3}\ \acute{\eta}\ \ x_2=\frac{2}{5}$$

$$\left(\frac{1}{3}e^{\frac{1}{3}x\left(x^2-\frac{11}{10}x+\frac{2}{5}\right)}>0\ ,\gamma\iota\alpha\ \kappa\acute{\alpha}\theta\varepsilon\ x\in R\right)$$

x	$-\infty$	$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$		$+\infty$
f′(x)	+	0	-	0	+	
f(x)	↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\left(-\infty,\frac{1}{3}\right]$ και στο $\left[\frac{2}{5},+\infty\right)$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{1}{3},\frac{2}{5}\right]$

Δ2. $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B} \Rightarrow P(A) \leq P(B)$

Από Δ1 οι θέσεις τοπικών ακρότατων της f είναι $x_1 = \frac{1}{3}$ και $x_2 = \frac{2}{5}$

Άρα $P(A) = \frac{1}{3}$ και $P(B) = \frac{2}{5}$

Αφού $\mathrm{A} \subseteq \mathrm{B}$ ισχύει $A \cap B = A$

Άρα $P(A \cap B) = P(A) = \frac{1}{3}$

$P(A - B) = P(A) - P(A \cap B) = 0$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(B) = \frac{2}{5}$

$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} = \frac{1}{15}$

Δ3.

α) $f(x) = h(x) \Leftrightarrow e^{\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right)} = e^{\frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right)} \Leftrightarrow (1-1)$

$\frac{1}{3}x\left(x^2 - \frac{11}{10}x + \frac{2}{5}\right) = \frac{1}{5}x\left(\frac{3x^2}{2} - x - \frac{1}{3}\right) \Leftrightarrow$

$x\left(\frac{x^2}{3} - \frac{11x}{30} + \frac{2}{15} - \frac{3x^2}{10} + \frac{x}{5} + \frac{1}{15}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$x\left(\frac{10x^2 - 9x^2}{30} + \frac{6x - 11x}{30} + \frac{3}{15}\right) = 0 \Leftrightarrow$

$x\left(\frac{x^2}{30} - \frac{5x}{30} + \frac{6}{30}\right) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{30}\left(x^2 - 5x + 6\right) = 0 \Leftrightarrow$

$x_1 = 0$ ή $x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_2 = 2$ ή $x_3 = 3$

β)

$x_1=0$ με $v_1=2 \cdot 0+1=1$

$x_2=2$ με $v_2=2 \cdot 2+1=5$

$x_3=3$ με $v_3=2 \cdot 3+1=7$

Άρα $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{3} x_i v_i}{v} = \frac{1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 + 3 \cdot 7}{7 + 5 + 1} = \frac{31}{13}$