ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2015

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σελ. 194

Α2. Θεωρία σελ. 188

Α3. Θεωρία σελ. 259

Α4. α.Λ β. Σ γ. Λ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$|z-4| = 2|z-1|$$

$$|z-4|^2 = (2|z-1|)^2$$

$$(z-4)(\overline{z}-4) = 4(z-1)(\overline{z}-1)$$

$$z\cdot\overline{z} - 4z - 4\overline{z} + 16 = 4z\overline{z} - 4z - 4\overline{z} + 4$$

$$3z\overline{z} = 12$$

$$z\overline{z} = 4$$

$$|z|^2 = 4$$

$$|z| = 2$$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος είναι κύκλος με κέντρο Κ(0, 0) και ακτίνα ρ=2

Β2 .

i) $$w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}$$

$$\overline{w} = \frac{2\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \frac{2\overline{z_2}}{\overline{z_1}} = \frac{2\frac{4}{z_1}}{\frac{4}{z_2}} + \frac{2\frac{4}{z_2}}{\frac{4}{z_1}} =$$

$$= \frac{2z_2}{z_1} + \frac{2z_1}{z_2} = w$$

$|z_1|^2 = 4$ $\quad$ $|z_2|^2 = 4$

$z_1\cdot\overline{z_1} = 4$ $\quad$ $z_2\cdot\overline{z_2} = 4$

$\overline{z_1} = \frac{4}{z_1}$ $\quad$ $\overline{z_2} = \frac{4}{z_2}$

Άρα $w \in R$

ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
Πρώτοι με την πρώτη!

ii) $$|w| = \left|\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}\right| \le \left|\frac{2z_1}{z_2}\right| + \left|\frac{2z_2}{z_1}\right| = 2\left|\frac{z_1}{z_2}\right| + 2\left|\frac{z_2}{z_1}\right| =$$

$$= 2\frac{|z_1|}{|z_2|} + 2\frac{|z_2|}{|z_1|} = 2\frac{2}{2} + 2\frac{2}{2} = 4$$

$w \in R$. $\quad |w| \le 4$, Άρα $-4 \le w \le 4$

Β3. $w = -4$

$$z_1 z_2 \cdot \frac{2z_1}{z_2} + z_1 z_2 \cdot \frac{2z_2}{z_1} = -4 \cdot (z_1 z_2)$$

$$2z_1^2 + 2z_2^2 = -4z_1 z_2$$

$$z_1^2 + z_2^2 = -2z_1 z_2$$

$$z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 z_2 = 0$$

$$(z_1 + z_2)^2 = 0$$

Άρα $z_1 = -z_2$

Έστω $z_1 = x + y_i$

$z_2 = -x - y_i$

$z_3 = 2i \cdot z_1 = 2i \cdot (x + y_i) = -2y + 2x_i$

Άρα $A(x, y)$ $\quad B(-x, -y)$ $\quad \Gamma(-2y, 2x)$

$$(AB) = \sqrt{(-2x)^2 + (-2y)^2} = \sqrt{4x^2 + 4y^2}$$

$$(A\Gamma) = \sqrt{(-2y - x)^2 + (2x - y)^2} =$$
$$= \sqrt{4y^2 + x^2 + 4xy + 4x^2 - 4xy + y^2} =$$
$$= \sqrt{5x^2 + 5y^2}$$

$$(B\Gamma) = \sqrt{(-2y + x)^2 + (2x + y)^2} =$$
$$= \sqrt{4y^2 + x^2 - 4xy + 4x^2 + 4xy + y^2} =$$
$$= \sqrt{5x^2 + 5y^2}$$

Άρα $(A\Gamma) = (B\Gamma)$ και ΑΒΓ ισοσκελές

ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ Πρώτοι μες την Πρώτη!

Β' τρόπος

$A(z_1) \quad B(z_2) \quad \Gamma(z_3)$

$|z_1 - z_2| = 2\rho = 4$ αφού Α και Β αντιδιαμετρικά

$|z_1 - z_3| = |z_1 - 2i \cdot z_1| = |z_1 \cdot (1-2i)| = |z_1| \cdot |1-2i| = 2\sqrt{5}$

$|z_2 - z_3| = |-z_1 - 2i \cdot z_1| = |z_1 \cdot (-1-2i)| = |z_1| \cdot |-1-2i| = 2\sqrt{5}$

Άρα $|z_1 - z_3| = |z_2 - z_3|$. Συνεπώς ΑΒΓ ισοσκελές

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \dfrac{e^x(x^2+1) - e^x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \dfrac{e^x(x^2+1-2x)}{(x^2+1)^2} = \dfrac{e^x(x-1)^2}{(x^2+1)^2} \geq 0$ για κάθε $x \in R$ άρα f γνησίως αύξουσα στο R.

f συνεχής στο R και γνησίως αύξουσα οπότε $f(R) = \left(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\right)$ με

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{e}{x^2+1} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{1}{x^2+1} e^x\right) = 0$

Και

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2+1} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2x} \underset{DLH}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{2} = +\infty$

Γ2. $f\left(e^{3-x}\left(x^2+1\right)\right) = \dfrac{e^2}{5}$ (1)

Για x=2 ισχύει $f(2) = \dfrac{e^2}{4+1} = \dfrac{e^2}{5}$

Η εξίσωση (1) γράφεται: $f\left(e^{3-x}\left(x^{2+1}\right)\right) = f(2) \underset{1-1}{\overset{f}{\Leftrightarrow}} e^{3-x}\left(x^2+1\right) = 2$

$\Leftrightarrow e^{3-x} = \dfrac{2}{x^2+1} \Leftrightarrow e^3 \cdot e^{-x} = \dfrac{2}{x^2+1} \Leftrightarrow \dfrac{e^3}{2} = \dfrac{e^x}{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{e^3}{2}$

ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΧΡΟΝΙΑ 15 Πρώτοι με την πρώτη!

Ισχύει ότι $\frac{e^3}{2} \in f(R)$ οπότε υπάρχει μοναδικό $x_0 \in R$ (αφού f γνησίως αύξουσα στο (R)

ώστε $f(x_0) = \frac{e^3}{2}$. Οπότε η εξίσωση (1) έχει μοναδική ρίζα στο R.

Γ3. Θεωρώ συνάρτηση $G(x) = S_a^x f(t)dt$ με α>0 και x>0

Για την G στο [2x, 4x] ισχύει:

G συνεχής στο [2x, 4x] (f συνεχής στο R οπότε ολοκληρώσιμη άρα η $S_a^x f(t)dt$ παραγωγίσιμη οπότε συνεχής) G παραγωγίσιμη στο (2x,4x) (...

Άρα από ΘΜΤ υπάρχει $\xi \in (2x,4x)$: $G'(\xi) = \frac{G(4x)-G(2x)}{4x-2x} = \frac{{}_a^{4x} f(t)dt - S_a^{2x} f(t)dt}{2x}$ με G΄(x)=f(x)>0 από Γ1

Ισχύει $2x < \xi < 4x \overset{G'\uparrow}{\Rightarrow} G'(2x) < G'(\xi) < G'(4x) \Rightarrow f(2x) < G'(\xi) < f(4x)$

Άρα G΄(ξ)<f(4x) $\Rightarrow \frac{S_a^{4x} f(t)dt - S_a^{2x} f(t)dt}{2x} < f(4x) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{S_{2X}^{4X} f(t)dt}{2x} < f(4x) \overset{x>0}{\Rightarrow} S_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x)$$

Γ4.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \cdot S_{2x}^{4x} f(t)dt, x > 0 \\ 2, \ x = 0 \end{cases}$$

Ελέγχω τη συνέχεια της g στο x_0=0

- $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \cdot S_{2x}^{4x} f(t)dt = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{S_{2x}^{4x} f(t)dt}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(4x)4 - f(2x)2}{1} =$

$$2 \lim_{x \to 0^+} (-f(2x) + 2f(4x)) = 2 \cdot (-f(0) + 2f(0)) = 2 \cdot f(0) = 2 \cdot 1 = 2$$

Οπότε g συνεχής στο x_0=0

Αιτιολόγηση συνέχειας της $S_{2x}^{4x} f(t)dt$ Η f είναι συνεχής στο (0,+∞) οπότε ολοκληρώσιμη άρα η $S_{2x}^{4x} f(t)dt$ παραγωγίσιμη οπότε συνεχής ως διαφορά των σύνθετων συναρτήσεων $S_a^{ax} f(t)dt$ και $S_a^{4x} f(t)dt$

Για x>0

$$g'(x) = -\frac{1}{x^2}\cdot S_{2x}^{4x} f(t)dt + \frac{1}{x}(f(4x) - 4 - 2f(2x) = -\frac{1}{x}\cdot(-4f(4x) + 2f(2x) + \frac{1}{x}S_{2x}^{4x} f(t)dt, x) =$$

$$= -\frac{1}{x}\cdot(\frac{S_{2x}^{4x} f(t)dt, x}{x} + 2f(2x) - 4f(4x))$$

Ισχύει ότι:

- $-\frac{1}{x} < 0 \, \gamma\iota\alpha \, x > 0$

Και

- $\frac{S_{2x}^{4x} f(t)dt, x}{x} < 2f(4x)$ (1)
- $2x < 4x \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(2x) < f(4x) \Rightarrow 2f(2x) < 2f(4x)$ (2)

Προσθέτω τις (1) και (2):

$$\frac{S_{2x}^{4x} f(t)dt, x}{x} + 2f(2x) < 4f(4x) \Rightarrow S_{2x}^{4x} f(t)dt, x + 2f(2x) - 4f(4x) < 0$$

Άρα

$$-\frac{1}{x}(S_{2x}^{4x} f(t)dt, x + 2f(2x) = 4f(4x)) > 0$$

Οπότε g΄(x)>0 για x>0 άρα g γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$f'(x) = e^{f(x)} + f'(x)e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow (e^{f(x)})' - (e^{-f(x)})' = (2x)' \Leftrightarrow e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c, \; c \in R$ Θέτω όπου $x = 0 : e^{f(0)} - e^{-f(0)} = c \Leftrightarrow e^0 - e^0 = c \Leftrightarrow c = 0$

Άρα $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x \Leftrightarrow e^{f(x)} - \frac{1}{e^{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow (e^{f(x)})^2 - 1 = 2x\cdot e^{f(x)} \Leftrightarrow (e^{2f(x)} - 2xe^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$
$\left[e^{f(x)} - x\right]^2 = x^2 + 1 > 0, \; x \in R$

Θεωρώ τη συνάρτηση g(x)= $e^{f(x)} - x, \; x \in R$ η οποία είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων.

Έχω $[g(x)]^2 = x^2 + 1 > 0, \; x \in R \; \acute{\alpha}\rho\alpha \; g(x) \neq 0, \; x \in R,$ δηλαδή η g διατηρεί σταθερό πρόσημο.

Επειδή g(0)= $e^{f(0)} - 0 = e^0 = 1 > 0, \; \acute{\varepsilon}\chi\omega \; g(x) > 0, \; x \in R$

Άρα $g^2(x) = x^2 + 1 \Rightarrow g(x) = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow$

$$e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x) = \ln(x+\sqrt{x^2+1}),\ x \in R$$

Δ2.

f παρ/μη στο R οπότε:

α) $$f'(x) = \frac{(x+\sqrt{x^2+1})'}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{1+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}} = \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}+x}{\sqrt{x^2+1}}}{\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}},\ x \in R$$

$$f''(x) = \frac{-(\sqrt{x^2+1})'}{x^2+1} = \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}},\ x \in R$$

Για x>0 ισχεύει: f'' (x)<0 οπότε f κοίλη.

Για x<0 ισχεύει: f''(x)>0 οπότε f κυρτή.

Άρα η fστο x_0=0 παρουσιάζει καμπή ίσο με f(0)=0.

β) $E(\Omega) = S_0^1 |f(x) - x| dx$

f κοίλη στο $[0, +\infty)$

Η y=x είναι εφαπτόμενη της C_f στο x_0=0 γιατί f'(0)=1 και f(0)=0.

Οπότε η C_f βρίσκεται κάτω από την y=x οπότε $f(x) - x \le 0\ \gamma\iota\alpha\ x \in [0, 1]$

Άρα

$$E(\Omega) = S_0^1 (x - f(x))dx = S_0^1 x dx - S_0^1 (x)' f(x))dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - [xf(x)]_0^1 + S_0^1 x \cdot f'(x))dx =$$

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - [xf(x)]_0^1 + S_0^1 x \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - [xf(x)]_0^1 + S_0^1 x \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx =$$

$$= \frac{1}{2} - f(1) + \left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - f(1) + \sqrt{2} - 1 = \frac{1}{2} - \ln(1+\sqrt{2}) + \sqrt{2} - 1 = \sqrt{2} - \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}-1}{2} - \ln(1+\sqrt{2})\ \tau.\mu o\nu.$$

Δ3.

Για x>0 έχουμε f(x)>0 άρα $|f(x)| = f(x)$

Οπότε

$$\lim_{x\to 0}\left[e^{S_0^X f^2(t)dt}-1\right]\ln f(x)$$

$$\lim_{x\to 0^+}(e^{S_0^X f^2(t)dt}-1)=e^0-1=1-1=0$$

Και

$$\lim_{x\to 0^+}\ln f(x)=\lim_{x\to 0^+}\ln u=-\infty$$

Θέτω u=f(x)

Άρα $\lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=\ln 1=0$

Οπότε $u\to 0$

Άρα απροσδιοριστία $0\cdot(-\infty)$

Οπότε το όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{e^{S_0^X f^2(t)dt}-1}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{Dut}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{e^{S_0^X f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{(e^{S_0^X f^2(t)dt}-1)^2}}=-\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)\left[e^{S_0^X f^2(t)dt}-1\right]^2}{f^3(x)\cdot e^{S_0^X f^2(t)dt}}=$$

$$=-\lim_{x\to 0^+}\frac{f'(x)}{f^3(x)}\cdot\frac{(e^{S_0^X f^2(t)dt}-1)^2}{e^{S_0^X f^2(t)dt}}=-1\cdot 0=0$$

Υπολογισμός του

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(e^{S_0^X f^2(t)dt}-1)^2}{e^{S_0^X f^2(t)dt}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{Dut}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{2(e^{S_0^X f^2(t)dt}-1)e^{S_0^X f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{e^{S_0^X f^2(t)dt}f^2(x)}=\lim_{x\to 0^+}2(e^{S_0^X f^2(t)dt}-1)=2\cdot(1-1)=0$$

ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
Πρώτοι με την πρώτη!

Δ4.

$$K(x)=(x-2)\left[1-3\int_0^{x-2} f(t)^2dt\right]+(x-3)\left[8-3\int_0^{x} f^2(t)dt\right]$$

Κ(x) συνεχής στο [2, 3]

$$K(2)=3\int_0^2 f^2(t)dt-8$$

$$K(3)=1-3\int_0^1 f(t^2)dt$$

Στο [2, 3] η f είναι κυρτή, άρα f(t)>t, t∈[2, 3] και f(t)>0, άρα

$$f(t^2) > t^2,\ \delta\eta\lambda.\ \int_0^1 f(t^2)dt > \int_0^1 t^2 dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

Άρα $\int_0^1 f(t^2)dt > \frac{1}{3} \Leftrightarrow 3\int_0^1 f(t^2)dt > 1 \Leftrightarrow 0 > 1 - 3\int_0^1 f(t^2)dt,\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ K(3) < 0$

Άνάλογα f(t)>t, t∈[2, 3]

f(t)>0 άρα

$$f^2(t) > t^2,$$

$$\int_0^2 f^2(t)dt > \int_0^2 t^2 dt$$

$$\int_0^2 f^2(t)dt > \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2$$

$$\int_0^2 f^2(t)dt > \frac{8}{3} \Leftrightarrow 3\int_0^2 f^2(t)dt - 8 > 0,\ K(2) > 0$$

Άρα K(2)K(3)<0, ισχύει το Θ.Bolzano, άρα η K(χ) έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2, 3) δηλαδή η εξίσωση $\frac{1 - 3\int_0^{x-2} f(t)^2 dt}{x-3} + \frac{8 - 3\int_0^x f^2(t)dt}{x-2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2, 3).

15 ΧΡΟΝΙΑ ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
Πρώτοι με την πρώτη!