ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2013

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχ. βιβλίου σελ. 334 – 335

Α2. Θεώρημα σελ. 246

Α3. Ορισμός σελ. 222 «Η f είναι παραγωγίσιμη… και $\lim_{x\to\beta^-}\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\in R$

Α4. α. Λ: η ακτίνα είναι το ρ

β. Σ

γ. Σ

δ. Λ: είναι $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=0$

ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

$(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2$

Β1.

(z-2)($\bar{z}-2)+|z-2|=2$

$(z-2)(\overline{z-2})+|z-2|=2$

$|z-2|^2+|z-2|=2$

$|z-2|^2+|z-2|-2=0$

Θετω $\omega=|z-2|\geq 0$

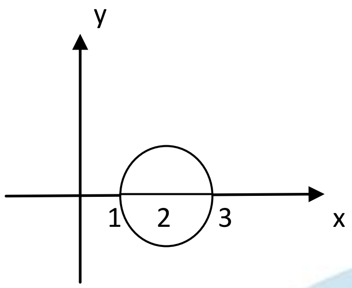
$\omega^2+\omega-2=0$

Δ=1-4·1·(-2)=9

$\omega_1,\omega_2=\dfrac{-1\pm 3}{2}=1,-2\text{ΑΠΟΡ.}$

Οπότε $|z-2|=1$

Ο γεωμετρικός τόπος του z είναι κύκλος με κέντρο Κ(2,0) και ρ=1



Ο μιγαδικός z του οποίου το $|z|$ γίνεται μέγιστο είναι ο z=3 οπότε $|z|\le 3$

B2.

z_1, z_2 ρίζες της $w^2+\beta w+\gamma=0$ (I)

$$|\mathrm{Im}(z_1)-\mathrm{Im}(z_2)|=2$$

Οι z_1 και z_2 ρίζες της (I) οπότε $z_1=\bar{z}_2$ άρα αν $z_1=\kappa+\lambda i$ τότε $z_2=\kappa-\lambda i$

Οπότε $|\lambda-(-\lambda)|=2 \Leftrightarrow |2\lambda|=2 \Leftrightarrow |\lambda|=1$

Άρα λ=1 ή λ=-1

Ισχύει ότι $|z-2|=1$ άρα

$$|\kappa+i-2|=1 \Rightarrow |(\kappa-2)+i|=1 \Rightarrow (\kappa-2)^2+1=1 \Leftrightarrow (\kappa-2)^2=0$$

Άρα κ=2

Οι z_1 και z_2 είναι: $z_1=2+i$ και $z_2=2-i$ Ισχύει από Vieta: $z_1+z_2=-\dfrac{\beta}{\alpha}=-\dfrac{\beta}{1}=-\beta$

άρα $4=-\beta \Leftrightarrow \beta=-4$

$$z_1\cdot z_2=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\gamma}{1}=\gamma\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ 4+1=\gamma \Leftrightarrow \gamma=5$$

B3.

Έχω $v^3=-a_2v^2-a_1v-a_0 \le |a_2||v|^2+|a_1|v+|a_0| \Rightarrow |v|^3 \le 3|v|^2+3|v|+3$

Άρα $|v|^3<3|v|^2+3|v|+4 \Rightarrow |v|^3-3|v|^2-3|v|-4<0$

$(|v|-4)\cdot(|v|^2+|v|+1)<0$ (Σχήμα Horner) $\Leftrightarrow$

Ισχύει ότι:

$|\nu|^2+|\nu|+1>0$ Επειδή Δ<0

Άρα $|\nu|<4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$$(f(x)+x)(f(x)+x)'=x$$

$$\left[\frac{(f(x)+x)^2}{2}\right]'=\left[\frac{x^2}{2}\right]' \text{ οπότε } \frac{(f(x)+x)^2}{2}=\frac{x^2}{2}+C \;\mu\varepsilon\, C\in R$$

f(0)=1 οπότε για x=0 ισχύει:

$$\frac{(f(0))^2}{2}=0+C \Leftrightarrow \frac{1}{2}=C$$

Άρα $\dfrac{(f(x)+x)^2}{2}=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}\,\acute{\alpha}\rho\alpha\,(f(x)+x)^2=x^2+1$

Και $x^2+1>0$ για κάθε $x\in R$ οπότε $f(x)+x=\sqrt{x^2+1}$ $\acute{\eta}$ $f(x)+x=-\sqrt{x^2+1}$ ΑΠΟΡ. Γιατί f(0)=-1

Άρα $f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$ και $x\in R$

Γ2.

$\mathrm{f(g(x))=1}$ οπότε $\mathrm{f(g(x))=f(0)} \underset{R}{\overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow}} \mathrm{g(x)=0}$

Οπότε $\mathrm{x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1=0}$

$$\mathrm{g'(x)=3x^2+3x=3x(x+1)}$$

x		**-1**		**0**	
g’(x)	+	0	-	0	+
g(x)	↗		↘		↗

$\Delta_1 = (-\infty, -1]$ $g \uparrow$ στο Δ_1

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1\right) = -\infty$$

$$g(-1) = -1 + \frac{3}{2} - 1 = -2 + \frac{3}{2} = \frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$g(\Delta_1) = (-\infty, -\frac{1}{2}]$$

$\Delta_2 = [-1,\ 0]$ οπότε $g(\Delta_2) = [-1,\ -\frac{1}{2}]$

$$g(-1) = -\frac{1}{2}$$

$$g(0) = -1$$

$\Delta_3 = [0, +\infty)$ άρα $g(\Delta_3) = [-1,\ +\infty)$

$g(0) = -1$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1\right) = +\infty$$

Ισχύει ότι $0 \in g(\Delta_3)$ οπότε υπάρχει $x_0 \in \Delta_3$ ώστε $g(x_0) = 0$

Επειδή g είναι γνησίως αύξουσα στο Δ_3 η $g(x) = 0$ έχει μία ακριβώς ρίζα.

Γ.3

Θεωρώ $\Phi(x) = \int_{x-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt - f(x - \frac{\pi}{4})\text{εφ}x$

Για τη φ Θεώρημα Bolzano στο $[0, \frac{\pi}{4}]$

- Φ συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{4}]$ ως αλγεβρικό άθροισμα συνεχών συναρτήσεων
- Φ(0)= $\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt - f(-\frac{\pi}{4})\text{εφ}0 = \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt > 0$

Γιατί: f γνησίως φθίνουσα στο R

$$-\frac{\pi}{4}<t<0 \overset{\downarrow}{\Leftrightarrow} f(-\frac{\pi}{4})>f(t)>f(0)$$

$$f(0)<f(t)<f(-\frac{\pi}{4}) \text{ με } f(-\frac{\pi}{4})=\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+1}+\frac{\pi}{4}\,\kappa\alpha\iota\, f(0)=1$$

Οπότε $1<f(t)<\sqrt{\frac{\pi^2}{16}+1}+\frac{\pi}{4}\,\acute{\alpha}\rho\alpha\, f(t)>0\,o\pi\acute{o}\tau\varepsilon \int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f(t)dt>0$

- $\Phi(\frac{\pi}{4})=\int_0^0 f(t)dt-f(0)\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}=-1\cdot 1=-1$

  Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(0,\frac{\pi}{4})$ τέτοιο ώστε $\Phi(x_0)=0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Έχω $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h}=0$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h}=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}[\frac{-f(1+5h)-f(1)}{h}-\frac{f(1-h)-f(1)}{h}]=0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{h\to 0}[5\frac{f(1+5h)-f(1)}{5h}+\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}]=0$$

Άρα $5.f'(1)+f'(1)=0\Leftrightarrow 6f'(1)=0\Leftrightarrow f'(1)=0$

με $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f\ +1)}{5h}=\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=f'(1)$

Θέτω u=5h

Και $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{-h}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t}=f'(1)$

Θέτω t=-h

f΄(1)=0 και f΄γνησίως αύξουσα στο (0,+∞)

Για το πρόσημο της f΄ θα ισχύει:

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)		$\searrow$		$\nearrow$	

Ο.Ε.

Δ2.

$g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}>0,\ \ x>1,\ \ \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \ f(x)>f(1),\ \ x>1$ (από Δ1 η f έχει ολικό ελάχιστο)

Άρα g γνησίως αύξουσα.

Θεωρώ $F(x)=\int_x^{x+1} g(u)du,\ \ F\ \pi\alpha\rho\alpha\gamma\omega\gamma\acute{\iota}\sigma\iota\mu\eta\ \gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\ g\ \sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma$

Με $F'(x)=g(x+1)-g(x)>0,\ \ \alpha\varphi o\acute{\upsilon}\ \ x+1>x\ \ \kappa\alpha\iota\ \ g(x+1)>g(x)$ άρα η F είναι γνησίως αύξουσα.

Έχω

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du>\int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du \Leftrightarrow F(8x^2+5)>F(2x^4+5)\Leftrightarrow 8x^2+5>2x^4+5\Leftrightarrow$$

$$2x^4-8x^2<0\Leftrightarrow 2x^2(x^2-4)<0\Leftrightarrow x\in(-2,0)\cup(0,\,2)$$

Δ3.

Έχω $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$

$$g''(x)=\left[\frac{f(x)-1}{x-1}\right]'=\frac{f'(x)(x-1)-[f(x)-1]}{(x-1)^2}=\frac{\phi(x)}{(x-1)^2}$$

με $\phi(x)=f'(x)(x-1)-[f(x)-1],\ \ x>1$

Πρέπει $\phi(x)>0\Leftrightarrow$

$f'(x)(x-1)>f(x)-1\Leftrightarrow$

$f'(x)>\dfrac{f(x)-1}{x-1}$

Θ.Μ.Τ για την f στο [1, x], άρα υπάρχει $\xi\in(1,x):\ f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}$ (1)

άρα πρέπει $f'(x) > f'(\xi)$ η οποία ισχύει αφού f' γνησίως αύξουσα και

$$1 < \xi < x \Leftrightarrow f'(\xi) < f'(x) \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} < f'(x) \Leftrightarrow \phi(x) > 0,\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ g''(x) > 0\ \delta\eta\lambda\alpha\delta\acute{\eta}$$

$\eta\ g\ \kappa\upsilon\rho\tau\acute{\eta}\ \sigma\tau o\ (1, +\infty)$

Θεωρώ $H(x) = (a-1)\cdot g(x) - [f(a)-1](x-a),\ x > 1$

$$H(a) = (a-1)\cdot g(a) - [f(a)-1](a-a)$$

$$= (a-1)\cdot 0 - [f(a)-1]\cdot 0 = 0$$

αφού $g(a) = \int_a^a \frac{f(t)-1}{t-1}dt$

άρα έχει ρίζα το α.

$$H'(x) = (a-1)\cdot g'(x) - [f(a)-1] > 0,\ \ x > 1$$

αφού g' γνησίως αύξουσα και g κυρτή

$$1 < a < x \Leftrightarrow g'(a) < g'(x) \Leftrightarrow \frac{f(a)-1}{a-1} < g'(x) \overset{a>1}{\Leftrightarrow} f(a) - 1 < g'(x)(a-1)$$

Δηλαδή $H'(x) > 0,\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ H(x)\ \gamma\nu\eta\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma\ \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha\ \sigma\tau o\ [\alpha, +\infty)$.

Με $1 < x < a \Leftrightarrow g'(x) < g'(a) \Leftrightarrow g'(x) < \frac{f(a)-1}{a-1} \Leftrightarrow H'(x) < 0,\ \acute{\alpha}\rho\alpha\ \mathrm{H}(x)$ γνησίως φθίνουσα στο (1, α], δηλαδή η $\mathrm{H}(x)$ έχει $\mathrm{H}_{\min}(a) = 0$ και $\mathrm{H}(x) > \mathrm{H}(a),\ 1 < x \neq a$

Επομένως η x=α είναι μοναδική ρίζα.