ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2012

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1**.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 253

Α2. Ορισμός σελ. 191

Α3. Ορισμός σελ. 258

Α4. α. Σ, β. Σ γ. Λ δ. Λ ε. Λ

ΘΕΜΑ Β

$$|z-1|^2+|z+1|^2=4$$

Β1.

$$(z-1)(\bar{z}-1)+(z+1)(\bar{z}+1)=4$$

$$z\bar{z}-z-\bar{z}+1+z\bar{z}+z+\bar{z}+1=4$$

$$2z\bar{z}=4-2$$

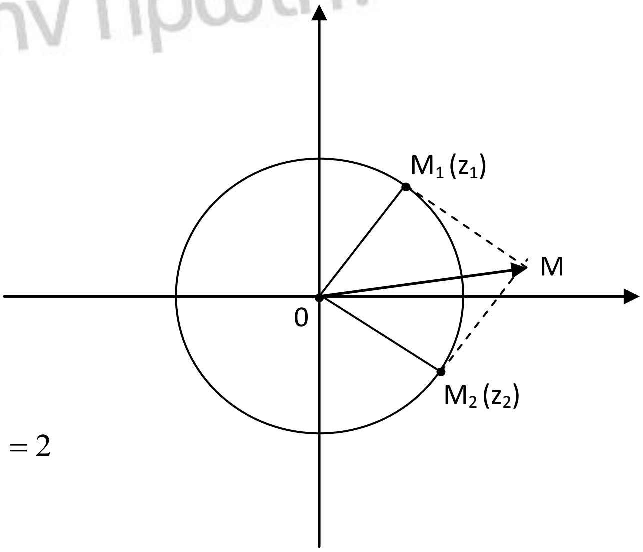
$$z\bar{z}=1$$

$$|z|^2=1$$

$|z|=1$ κύκλος με Κ(0, 0) ρ=1

Β2.

1^{ος} τρόπος



Είναι $|z_1-z_2|=(M_1M_2)=\sqrt{2}$.

Παρατηρώ ότι το τρίγωνο $M_2\overset{\Delta}{O}M_1$,

είναι ορθογώνιο αφού

$$(OM_1)^2+(OM_2)^2=1+1=(M_1M_2)^2=\sqrt{2}^2=2$$

και ισοσκελές αφού $(OM_1)=(OM_2)$

Το τετράπλευρο OM_1MM_2 είναι τετράγωνο (αφού έχω παραλ/μο με 1 ορθή και 2 διαδοχικές πλευρές ίσες)

Άρα $(OM)=|z_1+z_2|=(M_1M_2)=\sqrt{2}$

2ος τρόπος

Εφαρμόζω τον κανόνα παραλληλογράμμου αφού τον αποδείξω.....

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1+z_2})+(z_1-z_2)(\overline{z_1-z_2})$$
$$=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}+z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-z_2\overline{z_1}+z_2\overline{z_2}$$

$$=2z_1\overline{z_1}+2z_2\overline{z_2}=2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

Γνωρίζουμε ότι: $|z_1-z_2|=\sqrt{2}$

$|z_1|=1$, $|z_2|=1$

Άρα $|z_1+z_2|^2+2=2\cdot 1+2\cdot 1=4$

Άρα $|z_1+z_2|^2=2\Rightarrow |z_1+z_2|=\sqrt{2}$

3ος τρόπος

$$|z_1-z_2|=\sqrt{2}\Leftrightarrow |z_1-z_2|^2=2\Leftrightarrow$$

$$(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})=2\Leftrightarrow z_1\overline{z_1}-z_1\overline{z_2}-\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=2\Leftrightarrow$$

$$|z_1|^2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)+|z_2|^2=2 \quad (1)$$

Όμως z_1, z_2 ανήκουν στον γ.τόπο του Β1 άρα $|z_1|=|z_2|=1$ άρα

$$(1)\Rightarrow 2-(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2)=2\Leftrightarrow z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2=0$$

Θέτω $A=|z_1+z_2|\Leftrightarrow A^2=|z_1+z_2|^2\Leftrightarrow A^2=(z_1+z_2)(\overline{z_1}+\overline{z_2})$

$$=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}=1+0+1=2\Leftrightarrow A=\pm\sqrt{2}$$

Όμως Α>0 άρα Α=2

Β3. $\left|w-5\overline{w}\right|=12$

Έστω $w=x+yi$, τότε $\overline{w}=x-yi$

οπότε $w-5\overline{w}=(x+yi)-5(x-yi)$

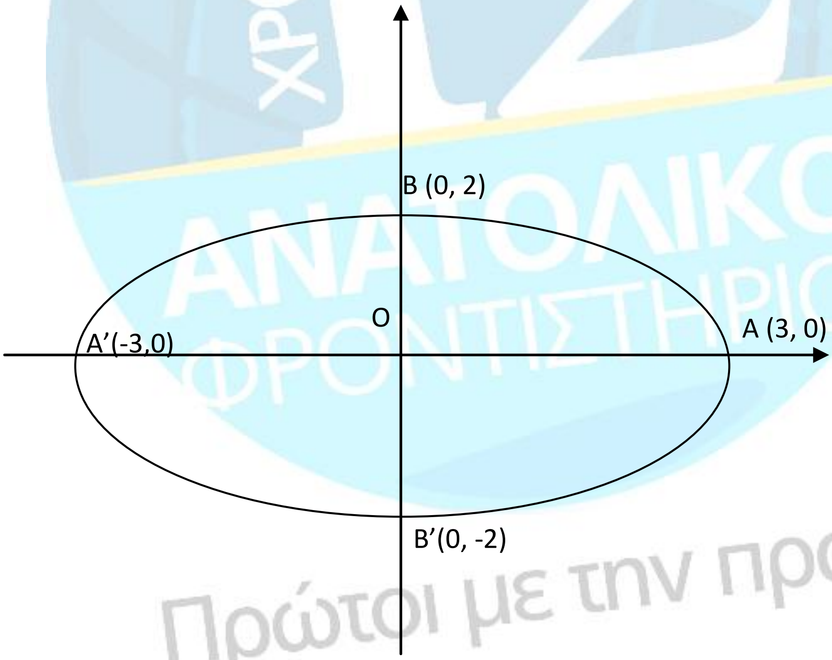
$$=x+yi-5x+5yi$$

$$\left.\begin{array}{l} =-4x+6yi \\ \left|w-5\overline{w}\right|=12 \end{array}\right\}$$

$$\sqrt{(-4x)^2+(6y)^2}=12 \Rightarrow 16x^2+36y^2=144 \overset{:144}{\Rightarrow} \frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$$

Ισχύει ότι: $\left.\begin{array}{l} a^2=9 \\ \beta^2=4 \end{array}\right\} \gamma^2=5$

Ο μεγάλος άξονας βρίσκεται στον χ΄χ.



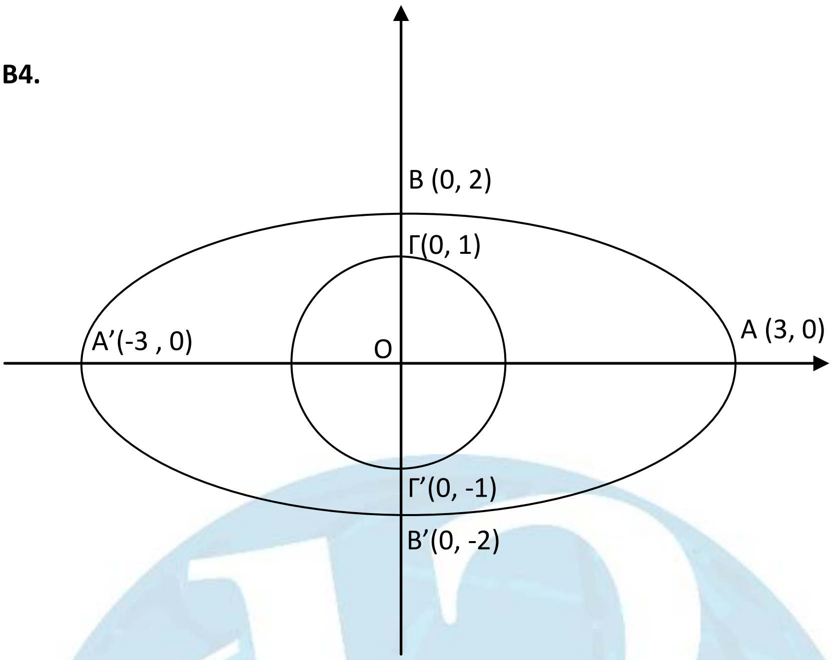
Έχω $|w|\max$ όταν η Μ(w) βρίσκεται στο Α ή στο Α΄

Επομένως $|w|\max=3$

και έχω $|w|\min$ όταν η Μ(w) βρίσκεται στο Β ή Β΄

Επομένως $|w|\min=2$

Β4.



$$|z-w|\max = (Α\Delta) = (\mathrm{O}\mathrm{A}) + (\mathrm{O}\Delta) = 3+1 = 4$$

$$|z-w|\min = (\Gamma\mathrm{B}) = (\mathrm{OB}) - (\mathrm{O}\Gamma) = 2-1 = 1$$

άρα $1 \le |z - w| \le 4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \ln x + 1 - \frac{1}{x}, x > 0$

$f''(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} > 0$ για κάθε $x > 0$

Άρα f' $\nearrow$ στο $(0, +\infty)$ με $f'(1) = 0$

Οπότε $0 < x < 1 \overset{f' \nearrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

Για $x > 1 \overset{f'}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

X	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	-	0	+	
$f(x)$	‖	$\searrow$		$\nearrow$	

$(1, f(1))$ ολικό ελάχιστο με $f(1) = -1$

Οπότε f στο Δ_1=(0,1] με $f(\Delta_1) = ([f(1), \lim_{x\to 0^+} f(x))$

Και $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}((x-1)\ln x - 1) = +\infty$

Άρα $f(\Delta_1) = [-1, +\infty)$

$f \nearrow$ στο Δ_2=[1,+ ∞) με $f(\Delta_2) = [f(1), \lim_{x\to +\infty} f(x))$

Και $\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}((x-1)\ln x - 1) = +\infty$

και $f(\Delta_2) = [-1, +\infty)$

Άρα $f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [-1, +\infty)$

Γ2. $x^{x-1} = e^{2013}$ με $x > 0$

Οπότε $\ln x^{x-1} = \ln e^{2013}$

Άρα $(x-1)\ln x = 2013 \Leftrightarrow (x-1)\ln x = 1 + 2012$

Άρα $(x-1)\ln x - 1 = 2012 \Leftrightarrow f(x) = 2012$

Η f στο $\Delta_1 = (0,1]$ έχει σύνολο τιμών $f(\Delta_1) = [-1, +\infty)$ και η τιμή 2012 ανήκει στο $f(\Delta_1)$.

Άρα υπάρχει μοναδικό $x_1 \in \Delta_1$ και $x_1 > 0$ (αφού η $f \searrow$ στο Δ_1) τέτοιο ώστε $f(x_1) = 2012$.

$f(\Delta_2) = [-1, +\infty)$ και $2012 \in f(\Delta_2)$

Υπάρχει μοναδικό $x_2 \in \Delta_2$ και $x_2 > 0$ (αφού η $f \nearrow$ στο Δ_2) με $f(x_2) = 2012$

Άρα η $f(x) = 2012$ έχει ακριβώς 2 θετικές ρίζες για κάθε $x > 0$

Γ3. $f(x_1) = 2012$, $f(x_2) = 2012$

Έχω $f'(x) + f(x) - 2012 = 0$, άρα θεωρώ

$h(x) = f'(x) + f(x) - 2012$.

Για την h θεώρημα Bolzano στο $[x_1, x_2]$, ισχύει:

h συνεχής στο $[x_1, x_2]$

$h(x_1) = f'(x_1) + f(x_1) - 2012 = f'(x_1) < 0$

$h(x_2) = f'(x_2) + f(x_2) - 2012 = f'(x_2) > 0$

$h(x_1) \cdot h(x_2) = f'(x_1) \cdot f'(x_2) < 0$

Άρα υπάρχει $x_0 \in (x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε $h(x_o) = 0$

Άρα $f'(x_o) + f(x_o) - 2012 = 0$

$f'(x_o) + f(x_o) = 2012$

Γ4. $g(x) = f(x) + 1 = (x-1)\ln x$

$(x-1)\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$

Άρα $g(x) \geq 0$ στο $(0, +\infty)$

x	0	1	$+\infty$
x-1	-	0	+
lnx	-	0	+
g(x)	+		+

$$E(\Omega) = \int_1^e g(x)dx = \int_1^e (x-1)\ln x dx =$$

$$= \int_1^e x\ln x dx - \int_1^e \ln x dx = [\frac{x^2}{2}\ln x]_1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx - [x\ln x]_1^e + \int_1^e \frac{1}{x}\cdot x dx =$$

$$= [\frac{x^2}{2}\ln x]_1^e - \frac{1}{2}[\frac{x^2}{2}]_1^e - [x\ln x]_1^e + [x]_1^e =$$

$$= \frac{e^2}{2}\ln e - \frac{1}{2}\ln 1 - \frac{1}{2}(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}) - (e\ln e - 1\ln 1) + (e-1) =$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\cdot\frac{e^2-1}{2} - e + e - 1 = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2-1}{4} - 1 =$$

$$= \frac{2e^2 - e^2 + 1 - 4}{4} = \frac{e^2-3}{4}$$ τετραγωνικές μονάδες

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Έχω $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt - \frac{x-x^2}{e} \geq 0$

Θεωρώ $G(x) = \int_1^{x^2-x+1} f(t)dt - \frac{x-x^2}{e}$ με G(x)≥,0,x>0 και $G(1) = \int_1^1 f(t)dt - 0 = 0$,

Άρα $G(x) \geq G(1), x > 0,$

Άρα $G'(1) = 0$ (Θεώρημα Fermat)

Έχω $G'(x) = (2x-1)f(x^2-x+1) - \frac{1}{e}(1-2x), x > 0$ και $G'(1) = f(1) + \frac{1}{e}$

Άρα $G'(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) + \frac{1}{e} = 0 \Leftrightarrow f(1) = -\frac{1}{e} < 0$

Έχω f συνεχή στο $(0,+\infty)$ και $f(x) \neq 0$, άρα η f διατηρεί σταθερό πρόσημο, με $f(1) = -\frac{1}{e} < 0$, άρα f(x)<0

Άρα

$$\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)(-f(x)) \Leftrightarrow \ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)f(x)$$

Έχω $\ln x - x = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)f(x)$ με lnx-x<0, αφού $\ln x - x \leq -1 < 0,$

Άρα $\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e \neq 0$. Έτσι $\dfrac{\ln x - x}{\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e}$ =f(x)

Άρα η f παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Επομένως $\frac{\ln x - x}{f(x)} = \int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e$

$$\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e \Leftrightarrow \left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right)'$$

$$\left(\frac{\ln x - x}{f(x)}\right)' = \frac{\ln x - x}{f(x)}, x > 0 \text{ άρα } \frac{\ln x - x}{f(x)} = c \cdot e^x, ^{(1)} c \in R, x > 0$$

Για x=1, έχω $\frac{\ln 1-1}{f(1)}=c\cdot e$, $\frac{-1}{-\frac{1}{e}}=c\cdot e, ce=e, c=1$

Άρα (1): $\frac{\ln x-x}{f(x)}=e^x$, $f(x)=\frac{\ln x-x}{e^x}$, $f(x)=e^{-x}(\ln x-x), x>0$

Δ2.

Έχω $\lim_{x\to 0^+} f(x)=\lim_{x\to 0^+} e^{-x}(\ln x-x)=-\infty$, άρα θέτοντας $u=\frac{1}{f(x)}, \lim_{x\to 0^+} u=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{f(x)}=0$

$$\lim_{x\to o^+}[f^2(x)\eta\mu\frac{1}{f(x)}-f(x)]=\lim_{u\to 0^-}(\frac{1}{u^2}\eta\mu u-\frac{1}{u})=\lim_{u\to 0^-}\frac{\eta\mu u-u}{u^2}=\lim_{u\to 0^-}\frac{\sigma\upsilon\nu u-1}{2u}=\lim_{u\to 0^-}\frac{-\eta\mu u}{2}=0$$

Δ3.

- $F'(x)=f(x)=e^{-x}(\ln x-x)$

  $F''(x)=-e^{-x}(\ln x-x)+e^{-x}(\frac{1}{x}-1)$

  $=e^{-x}(\frac{1}{x}-1-\ln x+x)>0,\ x>0$

  Αφού $\left.\begin{array}{l}\ln x\le x-1\Leftrightarrow 0\le x-\ln x-1\\ \kappa\alpha\iota\ \ \frac{1}{x}>0\end{array}\right|$ δηλ. $F''(x)>0, x>0$

  Άρα $\frac{1}{x}+x-\ln x-1>0,\ x>0$

  Δηλ. η F είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$

- Θ.Μ.Τ για την F στα διαστήματα [x, 2x] και [2x, 3x].

  Άρα υπάρχουν $\xi_1\in(x,2x),\ \xi_2\in(2x,3x)$ ώστε

  $$F'(\xi_1)=\frac{\mathrm{F(2x)-F(x)}}{2x-x}=\frac{\mathrm{F(2x)-F(x)}}{x}\quad(1)$$

  Και

  $$F'(\xi_2)=\frac{\mathrm{F(3x)-F(2x)}}{3x-2x}=\frac{\mathrm{F(3x)-F(2x)}}{x}\quad(2)$$

  Όμως F′ ↑ (κυρτή η F) άρα $0<\xi_1<\xi_2\Leftrightarrow \mathrm{F}'(\xi_1)<F'(\xi_2)\underset{(2)}{\overset{(1)}{\Leftrightarrow}}$

$$\frac{F(2x)-F(x)}{x} < \frac{F(3x)-F(2x)}{x} \overset{x>0}{\Leftrightarrow} F(2x)-F(x) < F(3x)-F(2x) \Leftrightarrow$$
$$2F(2x) < F(x)+F(3x),\ x>0$$

Δ4.

Θεωρώ $H(x) = 2F(x) - F(\beta) - F(3\beta), \quad x \in [\beta, 2\beta]$ με H συνεχής ως πράξη συνεχών συναρτήσεων, στο [β, 2β]

Έχω $H(\beta) = 2F(\beta) - F(\beta) - F(3\beta) = F(\beta) - F(3\beta) > 0$

Αφού F ↘ στο $(0, +\infty)$ και έχοντας $\beta < 3\beta \Leftrightarrow F(\beta) > F(3\beta) \Leftrightarrow F(\beta) - F(3\beta) > 0$

Η F είναι ↘, αφού $F'(x) = f(x) = e^{-x}(\ln x - x) < 0$, αφού
$\ln x \le x - 1 \Leftrightarrow \ln x - x \le -1 < 0$ και $e^{-x} > 0$

$H(2\beta) = 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta) < 0$

Αφού από Δ3. για x=β , έχω $F(\beta) + F(3\beta) > 2F(2\beta) \Leftrightarrow 0 > 2F(2\beta) - F(\beta) - F(3\beta)$

Άρα για την Η ισχύει το Θεώρημα Bolzano, δηλαδή υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ$\in$(β, 2β) ώστε Η(ξ)=0 $\Leftrightarrow 2F(\xi) = F(\beta) + F(3\beta)$