

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2009
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A) Απόδειξη σχολικό βιβλίο (σελ. 251)

B) Ορισμός σχολικό βιβλίο (σελ. 213)

- Γ)**
- α. $\rightarrow \Sigma$
 - β. $\rightarrow \Sigma$
 - γ. $\rightarrow \Lambda$
 - δ. $\rightarrow \Lambda$
 - ε. $\rightarrow \Lambda$

ΘΕΜΑ 2^ο

A.

α) Θέτω $z = x + yi$

Τότε: $x = 2\lambda + 1$

και $y = 2\lambda - 1, \lambda \in \mathbb{R}$

Αφαιρώ κατά μέλη: $x - y = 2 \Rightarrow y = x - 2$.

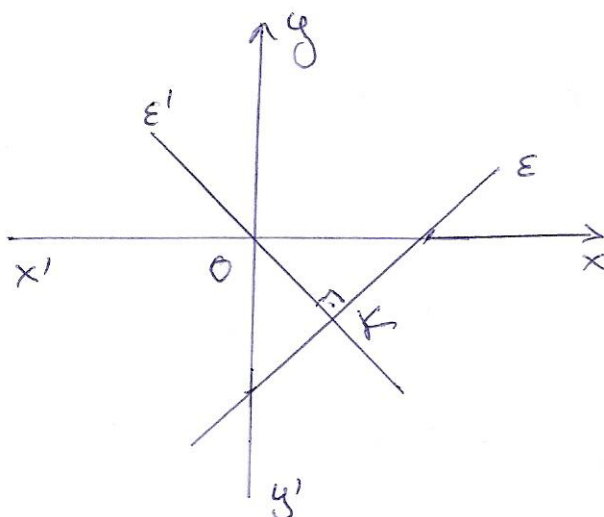
Άρα οι εικόνες των z βρίσκονται στην ευθεία $\varepsilon: y = x - 2$.

β) Ο z με το μικρότερο δυνατό μέτρο έχει ως εικόνα κ το σημείο τομής της $\varepsilon: y = x - 2$ και της κάθετης σ' αυτή ε' που διέρχεται από το $(0, 0)$:

$$\varepsilon' \perp \varepsilon \Leftrightarrow \lambda \varepsilon' \cdot \lambda \varepsilon = -1 \Leftrightarrow \lambda \varepsilon' \cdot 1 = -1 \Leftrightarrow \lambda \varepsilon' = -1.$$

Άρα $\varepsilon': y = -x$, αφού διέρχεται από το $(0, 0)$.

$$\begin{cases} y = x - 2 & (1) \\ y = -x & (2) \end{cases}$$



$$(1) + (2) : 2y = -2 \Leftrightarrow y = -1 \text{ και } (2) : -1 = -x \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα $K(1, -1)$ η εικόνα του z_0 και $z_0 = 1 - i$ ο μιγαδικός με το μικρότερο μέτρο.

Β. Θέτω $\omega = \alpha + \beta i$ και $z_0 = 1 - i$

$$|\omega|^2 + \bar{\omega} - 12 = z_0 \Rightarrow a^2 + \beta^2 + \alpha - \beta i - 12 = 1 - i$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2 + \beta^2 + \alpha = 13 \\ -\beta = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 + 1 + \alpha = 13 \\ b = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow a^2 + a - 12 \stackrel{(1)}{=} 0 \Leftrightarrow a_1 = -4 \text{ και } a_2 = 3 \text{ με } \beta = 1.$$

Άρα $\omega_1 = -4 + i$ και $\omega_2 = 3 + i$.

ΘΕΜΑ 3^ο

$$f(x) = a^x - \ln(x+1), \quad x > -1 \text{ όπου } a > 0 \text{ και } a \neq 1$$

Α) $f(x) \geq 1$

$$a^x - \ln(x+1) \geq 1$$

$$a^x - \ln(x+1) - 1 \geq 0$$

Έστω $g(x) = a^x - \ln(x+1) - 1 \geq 0, \quad x \in (-1, +\infty)$

Για $x = 0 : g(0) = 0$

Άρα $g(x) \geq g(0)$, για κάθε $x > -1$

Σύμφωνα με το Θεώρημα Fermat:

$$g'(0) = 0 \quad \text{για } x > -1$$

$$g'(x) = a^x \ln a - \frac{1}{x+1}$$

$$g'(0) = 0$$

$$a^0 \cdot \ln a - \frac{1}{1} = 0$$

$$\ln a = 1$$

$$\boxed{a = e}$$

Β) Για $a = e$

$$\alpha) f'(x) = e^x - \frac{1}{x+1} \quad \text{για } x > -1$$

$$f'(x) = \frac{e^x(x+1) - 1}{x+1}$$

$$f''(x) = e^x - \frac{-(x+1)'}{(x+1)^2} = e^x + \frac{1}{(x+1)^2}$$

$$e^x > 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R} \text{ οπότε και για } x > -1 \quad \frac{1}{(x+1)^2} > 0$$

Οπότε $f''(x) > 0$ για κάθε $x > -1$, άρα f κυρτή.

$$\beta) f'(x) = \frac{xe^x + e^x - 1}{x+1} \text{ και } x > -1$$

$$f'(x) = 0$$

$$xe^x + e^x - 1 = 0$$

$$\text{Θέτω } h(x) = xe^x + e^x - 1 \text{ για } x = 0: h(0) = 0$$

$$h'(x) = e^x + xe^x + e^x = 2e^x + xe^x = e^x \cdot (2+x)$$

$$h'(x) = e^x \cdot (2+x)$$

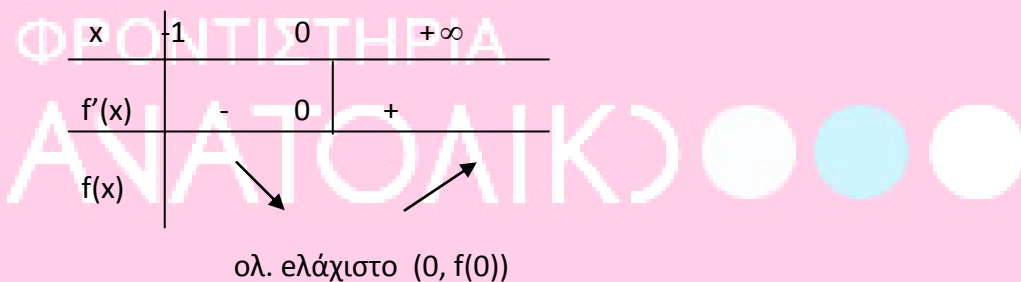
άρα για $x > -1: h'(x) > 0$ άρα $h \uparrow$ οπότε

$$-1 < x < 0 \stackrel{h \uparrow}{\Leftrightarrow} h(x) < h(0) \Leftrightarrow h(x) < 0 \Leftrightarrow xe^x + e^x - 1 < 0,$$

$$\text{άρα } f'(x) < 0$$

$$x > 0 \stackrel{h \uparrow}{\Leftrightarrow} h(x) > h(0) \Leftrightarrow h(x) > 0 \text{ οπότε } xe^x + e^x - 1 > 0$$

$$\text{άρα } f'(x) > 0$$



$$f(0) = e^0 - \ln(0+1) = \boxed{1}$$

$$\gamma) \beta, \gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$$

$$\frac{f(\beta) - 1}{x - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x - 2} = 0$$

$$(f(\beta) - 1)(x - 2) + (x - 1)(f(\gamma) - 1) = 0$$

$$\text{για τη } \phi(x) = (f(\beta) - 1)(x - 2) + (x - 1)(f(\gamma) - 1) = 0$$

ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ. Bolzano στο $[1, 2]$:

ϕ συνεχής στο $[1, 2]$

$$\phi(1) \phi(2) < 0$$

$$\phi(1) = (f(\beta) - 1)(-1) = -(f(\beta) - 1) = 1 - f(\beta) < 0$$

$$\phi(2) = (f(\gamma) - 1) > 0$$

$f(x) \geq f(0)$ δηλ. $f(x) \geq 1$ για κάθε $x > -1$
 $\beta \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ οπότε $f(\beta) > f(0) \Rightarrow f(\beta) > 1$
 $\gamma \in (-1, 0) \cup (0, +\infty)$ άρα $f(\gamma) > f(0) \Rightarrow f(\gamma) > 1$

Άρα η $\phi(x) = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$, δηλαδή

$$\phi(x_0) = 0 \Leftrightarrow (f(\beta) - 1)(x_0 - 2) + (x_0 - 1)(f(\gamma) - 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(\beta) - 1}{x_0 - 1} + \frac{f(\gamma) - 1}{x_0 - 2} = 0$$

ΘΕΜΑ 4^ο

A) Η f συνεχής στο $[0, 2]$ άρα οι συναρτήσεις $H(x) = \int_0^x tf(t)dt$ και $\int_0^x f(t)dt + 3$ παραγωγίσιμες στο $(0, 2]$ άρα και συνεχείς στο $(0, 2]$.
Επομένως στο $(0, 2]$ η G συνεχής ως πράξη συνεχών συναρτήσεων.

Στο $x_0=0$:

$$\bullet \quad G(0) = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1 - t^2}}{t^2} = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(1 - \sqrt{1 - t^2})(1 + \sqrt{1 - t^2})}{t^2(1 + \sqrt{1 - t^2})} = 6 \cdot \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - (1 - t^2)}{t^2(1 + \sqrt{1 - t^2})}$$

$$= 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t^2}{t^2(1 + \sqrt{1 - t^2})} = 6 \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \sqrt{1 - t^2}} = 6 \cdot \frac{1}{2} = 3.$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0} G(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\int_0^x tf(t)dt}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3 \right) = 3$$

αφού $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x tf(t)dt}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} xf(x) = 0f(0) = 0$ και $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^x f(t)dt = 0$, έχοντας την f συνεχή στο 0 άρα $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$.

Άρα $\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = G(0) = 3$ δηλαδή η G συνεχής σε όλο το $[0, 2]$.

B) Από το A) αποδείξαμε στην αρχή ότι η G παραγωγίσιμη στο $(0, 2)$ και

$$G'(x) = \left(\frac{H(x)}{x} - \int_0^x f(t)dt + 3 \right)' =$$

$$\frac{xH'(x) - H(x)}{x^2} - f(x) = \frac{xH'(x) - H(x) - x^2 f(x)}{x^2} = \frac{x \cdot xf(x) - H(x) - x^2 f(x)}{x^2} = -\frac{H(x)}{x^2}$$

Γ.

1^{ος} τρόπος

Στο $[0, 2]$ έχω

$$\int_0^2 (t - 2)f(t)dt = 0 \Leftrightarrow \int_0^2 tf(t)dt - 2 \int_0^2 f(t)dt = 0 \Rightarrow \int_0^2 tf(t)dt = 2 \int_0^2 f(t)dt$$

$$\Leftrightarrow \frac{\int_0^2 tf(t)dt}{2} = \int_0^2 f(t)dt \Leftrightarrow \frac{H(2)}{2} = \int_0^2 f(t)dt \quad (1)$$

Για την $G(x)$ στο $[0, 2]$ ισχύει το Θ.Μ.Τ. άρα υπάρχει $a \in (0, 2)$:

$$\begin{aligned} G'(a) &= \frac{G(2) - G(0)}{2 - 0} \Leftrightarrow -\frac{H(a)}{a^2} = \frac{\frac{H(2)}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 - 3}{2} \\ &\Leftrightarrow -\frac{H(a)}{a^2} \stackrel{(1)}{=} \frac{\int_0^2 f(t)dt - \int_0^2 f(t)dt}{2} \Leftrightarrow -\frac{H(a)}{a^2} = 0 \Leftrightarrow H(a) = 0. \end{aligned}$$

2^ο τρόπος

Ισχύουν για την G οι προϋποθέσεις του θ. Rolle στο $[0, 2]$.

$$G(0) = 3$$

$$G(2) = \frac{H(2)}{2} - \int_0^2 f(t)dt + 3 = \int_0^2 f(t)dt - \int_0^2 f(t)dt + 3 = 3.$$

Οπότε $G(0) = G(2)$ άρα (θ. Rolle) $a \in (0, 2)$: $G'(a) = 0 \Leftrightarrow -\frac{H(a)}{a^2} = 0 \Leftrightarrow H(a) = 0$.

Δ)

1^{ος} τρόπος

Θ.Μ.Τ. για την G στο $[0, a]$

$$G'(\xi) = \frac{G(a) - G(0)}{a} \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} = \frac{\frac{H(a)}{a} - \int_0^a f(t)dt + 3 - 3}{a} \Leftrightarrow -\frac{\int_0^\xi tf(t)dt}{\xi^2} = \frac{-\int_0^a f(t)dt}{a}$$

($H(a)=0$ από Γ.)

$$\Leftrightarrow a \int_0^\xi tf(t)dt = \xi^2 \int_0^a f(t)dt.$$

2^{ος} τρόπος

Έχω για την ϕ να ισχύουν οι προϋποθέσεις του θ. Rolle στο $[0, a]$, με

$$\phi(x) = G(x) + \frac{x}{a} \int_0^a f(t)dt.$$

Αφού

$$\phi(0) = G(0) + \frac{0}{a} \int_0^a f(t)dt = 3 + 0 = 3$$

$$\phi(a) = G(a) + \frac{a}{a} \int_0^a f(t)dt = \frac{H(a)}{a} - \int_0^a f(t)dt + 3 + \int_0^a f(t)dt = 0 + 3 = 3.$$

Άρα υπάρχει $\xi \in (0, a)$: $\phi'(\xi) = 0$ με $\phi'(x) = G'(x) + \frac{1}{a} \int_0^a f(t)dt$.

Έτσι

$$\begin{aligned}\phi'(\xi) = 0 &\Leftrightarrow G'(\xi) + \frac{1}{a} \int_0^a f(t) dt = 0 \Leftrightarrow -\frac{H(\xi)}{\xi^2} + \frac{1}{a} \int_0^a f(t) dt = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} \int_0^a f(t) dt = \frac{H(\xi)}{\xi^2} \\ &\Leftrightarrow \xi^2 \int_0^a f(t) dt = a \int_0^\xi t f(t) dt \ .\end{aligned}$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ

