ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2010
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

<u>ΘΕΜΑ Α</u>

Α1. Απόδειξη σελ. 304
Α2. ορισμός σελ. 279
Α3. ορισμός σελ. 273
Α4. Σ, Σ, Λ, Λ, Σ

<u>ΘΕΜΑ Β</u>

Β1. $z^2+z=2z$ (αφού $z\neq 0$) $\Rightarrow$

$$z^2-2z+2=0 \Rightarrow \Delta=-4=4i^2 \Rightarrow z_{1,2}=\frac{2\pm\sqrt{4}i}{2\cdot 1}$$

Άρα $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$

Β2. $z_1^{2010}+z_2^{2010}=\left(z_1^2\right)^{1005}+\left(z_2^2\right)^{1005}$

Όπου $z_1^2=(1+i)^2=1^2+2i+i^2=1+2i-1=2i$

$z_2^2=(1-i)^2=1^2-2i+i^2=1-2i-1=-2i$

Άρα $z_1^{2010}+z_2^{2010}=(2i)^{1005}+(-2i)^{1005}=$

$=2^{1005}\cdot i^{1005}-2^{1005}\cdot i^{1005}=0$

Β3. $|w-4+3i|=|z_1-z_2|\Rightarrow$

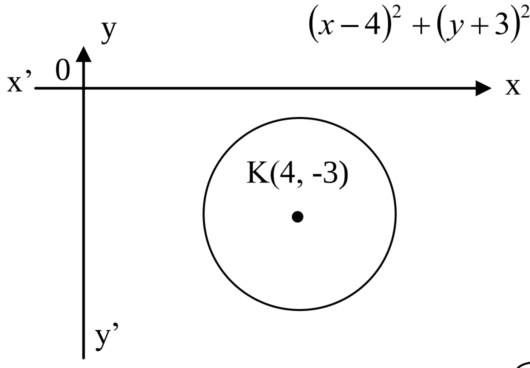
$|w-4+3i|=|1+i-1+i|\Rightarrow$

$|w-4+3i|=|2i|\Rightarrow$

$|w-(4-3i)|=2$

Άρα ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w είναι ο κύκλος

$$(x-4)^2+(y+3)^2=4$$



Β4. $\min|w|=(OK)-\rho=5-2=3$

Αφού

$(\text{OK})=\sqrt{(4-0)^2+(-3-0)^2}=$

$=\sqrt{4^2+3^2}=5$

ρ=2

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x)=2x+\ln(x^2+1)$

$$f'(x)=2+\frac{1}{x^2+1}\cdot 2x=\frac{2\left(x^2+x+1\right)}{x^2+1}$$

- $x^2+1>0$
- $x^2+x+1>0$ **αφού** $\Delta=1-4=-3<0$

Άρα $f'(x)>0 \Rightarrow$ **η** f **γνησίως αύξουσα στο** R **.**

Γ2.

$$2\left(x^2-3x+2\right)=\ln\left[\frac{(3x-2)^2+1}{x^4+1}\right]\Rightarrow \ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\ln\left(x^4+1\right)-2\left(x^2-3x+2\right)=0\Rightarrow$$

$$\ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\ln\left(x^4+1\right)-2x^2+2(3x-2)=0$$

$$2(3x-2)+\ln\left[(3x-2)^2+1\right]-\left[2x^2+\ln\left(x^4+1\right)\right]=0$$

$$f(3x-2)-f(x^2)=0$$

$$f(x^2)=f(3x-2)\Rightarrow x^2=3x-2$$

όμως η f **γνησίως αύξουσα, άρα**

$x^2-3x+2=0\Rightarrow x=1$ **ή** $x=2$

Γ3. $f'(x)=2+\dfrac{2x}{x^2+1}=\dfrac{2x^2+2x+2}{x^2+1}$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ

$$f''(x)=\frac{(4x+2)\left(x^2+1\right)-2x\left(2x^2+2x+2\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{4x^3-2x^2+4x+2-4x^3-4x-4x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$$=\frac{-2x^2+2}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{-2\left(x^2-1\right)}{\left(x^2+1\right)^2}$$

$f(-1)=-2+\ln 2$, $f(1)=2+\ln 2$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\frown$	Σ.Κ.	$\smile$	Σ.Κ.	$\frown$	

Άρα $A(-1,\ln 2-2)$ $\quad$ $B(1,\ln 2+2)$

$$f'(-1)=\frac{2(1-1+1)}{1+1}=1 \qquad f'(1)=\frac{2+2+2}{1+1}=3$$

$$\varepsilon_1:\ y-(\ln 2-2)=1(x+1) \qquad \varepsilon_2:\ y-(\ln 2+2)=3(x-1)$$

$$y=x+\ln 2-1 \qquad y=3x+\ln 2-1$$

$$\left.\begin{matrix}\varepsilon_1: \\ \varepsilon_2\end{matrix}\right\} \left.\begin{matrix} y=x+\ln 2-1 \\ y=3x+\ln 2-1\end{matrix}\right\} \begin{matrix} x=0 \\ y=\ln 2-1\end{matrix}$$

Άρα $K(0,\ln 2-1)$ που είναι σημείο του y'y.

Γ4. $\int_{-1}^{1} \mathrm{xf(x)dx} = \int_{-1}^{1}\left[2x^2+x\ln(x^2+1)\right]dx$

$$=\int_{-1}^{1}2x^2dx+\int_{-1}^{1}x\ln(x^2+1)dx$$

$$=\left[\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\left(\frac{x^2}{2}\right)'\cdot\ln(x^2+1)dx$$

$$=\left[\frac{2x^3}{3}\right]_{-1}^{1}+\left[\frac{x^2}{2}\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$=\left(\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\right)+\left(\frac{\ln 2}{2}-\frac{\ln 2}{2}\right)-\int_{-1}^{1}\frac{x^3}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{4}{3}-\int_{-1}^{1}\frac{(x^2+1)\cdot x-x}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{4}{3}-\int_{-1}^{1}\left(x-\frac{x}{x^2+1}\right)dx$$

$$=\frac{4}{3}-\int_{-1}^{1}xdx+\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$=\frac{4}{3}-\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1}+\frac{1}{2}\left[\ln(x^2+1)\right]_{-1}^{1}$$

$$=\frac{4}{3}-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}(\ln 2-\ln 2)=\frac{4}{3}$$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = x + 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t) - t} dt$

$f'(x) = 1 + \frac{x}{f(x) - x} = \frac{f(x) - x + x}{f(x) - x} = \frac{f(x)}{f(x) - x}$

Δ2. $g'(x) = 2f(x)f'(x) - 2f(x) - 2xf'(x) = 2f'(x)[f(x) - x] - 2f(x)$

$= 2 \cdot \frac{f(x)}{f(x) - x} \cdot [f(x) - x] - 2f(x) = 2f(x) - 2f(x) = 0$, **άρα g σταθερή.**

Δ3. $g(x) = c$, $c \in R$

Με $g(0) = (f(0))^2 - 20f(0) = (f(0))^2 = 9$ **αφού** $f(0) - 0 = 3 + \int_0^0 \frac{t}{f(t) - t} dt = 3$

άρα $g(x) = 9$

άρα $9 = (f(x))^2 - 2xf(x) \overset{\pi\rho o\sigma\theta\acute{\varepsilon}\tau\omega \ \tau o \ x^2}{\Longrightarrow} (f(x))^2 - 2xf(x) + x^2 = x^2 + 9$

$[f(x) - x]^2 = x^2 + 9$ **(1)**

Αν $\phi(x) = f(x) - x$, $x \in R$, **τότε** $[\phi(x)]^2 = x^2 + 9 > 0$ **άρα** $\phi(x) \neq 0$ **και φ συνεχής, άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο.**

Είναι $\phi(0) = f(0) - 0 = f(0) = 3 > 0$ **άρα** $\phi(x) > 0$ **έτσι (1)** $[\phi(x)]^2 = x^2 + 9$ **άρα** $\phi(x) = \sqrt{x^2 + 9}$ **δηλαδή**

$f(x) - x = \sqrt{x^2 + 9}$

$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$, $x \in R$.

Δ4. Έχω $f'(x) = \left[1 + \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + 9}}\right] = \frac{\sqrt{x^2 + 9} + x}{\sqrt{x^2 + 9}} > 0$

Αφού $\sqrt{x^2 + 9} + x > \sqrt{x^2} + x = |x| + x \geq 0$, $x \in R$.

Άρα $f \uparrow$.

- $x \leq t \leq x + 1$ **με το** $=$ **να ισχύει μόνο για** $t = x$ **και** $t = x + 1$ **αντίστοιχα.**
  Άρα $f(x) \leq f(t) \leq f(x + 1)$.

  $\int_x^{x+1} f(x) dt < \int_x^{x+1} f(t) dt < \int_x^{x+1} f(x+1) dt$,

  $f(x)(x + 1 - x) < \int_x^{x+1} f(t) dt < f(x + 1)(x + 1 - x)$,

  $f(x) < \int_x^{x+1} f(t) dt < f(x + 1)$ **(1)**

- $x+1 \le t \le x+2$ **με το** $=$ **να ισχύει μόνο για** $t = x+1$ **και** $t = x+2$ **αντίστοιχα.**

  Άρα $f(x+1) \le f(t) \le f(x+2)$

  $\int_{x+1}^{x+2} f(x)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(x+2)dt$

  $f(x+1)(x+2-x-1) < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt < f(x+2)(x+2-x-1)$

  $f(x+1) < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt < f(x+2)$ **(2)**

  Από (1)& (2) έχω $\int_{x}^{x+1} f(t)dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)dt$**,** $x \in R$**.**

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ