

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2014

ΘΕΜΑ Α

A1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου: σελ. 251

A2. Ορισμός σχολικού βιβλίου: σελ. 273

..., αν η f' είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ

A3. Ορισμός σχολικού βιβλίου: σελ. 150

..., όταν $f(x) \leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

A4. Λ αφού $z - \bar{z} = 2 \operatorname{Im}(z)i$

Σ σελ. 178

Σ σχόλιο σελ. 260

Σ θεώρημα 2^o σελ. 332

Λ σχόλιο σελ. 254

ΘΕΜΑ Β

B1. $2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4i = 0$

$$2x^2 + 2y^2 + 2xi - 4 - 2i = 0$$

$$2x^2 + 2y^2 - 4 + (2x - 2)i = 0$$

$$x^2 + y^2 = 2 \text{ πρέπει και } x=1, y=\pm 1$$

Επομένως $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$

B2. $\omega = 3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}$

$$= 3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39}$$

$$= 3\left(\frac{1-1+2i}{2}\right)^{39} = 3i^{39} = -3i$$

B3.

$$|u + \omega| = |4z_1 - z_2 - i|$$

$$|u - 3i| = |4 + 4i - 1 + i - i|$$

$$|u - 3i| = |3 + 4i|$$

$$|u - 3i| = 5$$

γεωμετρικός τόπος των εικόνων του υ είναι κύκλος με: K(0,3), R=5

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $h(x) = x - \ln(e^x + 1)$, $x \in \mathbb{R}$

$$h(x) = \ln \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$$

$$h''(x) = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γ2. $h(x) = x - \ln(e^x + 1) = \ln e^x - \ln(e^x + 1) = \ln \frac{e^x}{e^x + 1}, x \in \mathbb{R}$

$$h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1 - e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$$

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \quad h'(0) = \frac{1}{2}$$

$$\ln e^{h(2h'(x))} < \ln \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h(2h'(x)) < h(1) \Leftrightarrow 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h'(x) < h'(0) \stackrel{h \downarrow}{\underset{\mathbb{R}}{\Leftrightarrow}} x > 0$$

Γ3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{u \rightarrow 1} \ln u = 0$

Άρα γ=0 οριζόντια στο $+\infty$

$$u = \frac{e^x}{e^x + 1}$$

$$u_0 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$u \rightarrow 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{h(x)}{x} = \lambda$$

$$\lambda = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{\ln(e^x + 1)}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \cdot \ln(e^x + 1)\right) = 1$$

$$\beta = \lim_{x \rightarrow -\infty} [x - \ln(e^x + 1) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [-\ln(e^x + 1)] = 0$$

Άρα η γ=χ

Γ4. $\Phi(x) = e^x(h(x) + \ln 2)$, $x \in \mathfrak{R}$

$$\Phi(x) = 0$$

$$h(x) + \ln 2 = 0$$

$$h(x) = -\ln 2$$

$$h(x) = \ln \frac{1}{2}$$

$$\ln \frac{e^x}{e^x + 1} = \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2e^x = e^x + 1 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

$$E(\Omega) = \int_0^1 |\Phi(x)| dx$$

$$e^x > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathfrak{R}$$

$$h(x) + \ln 2 > 0 \Leftrightarrow h(x) > -\ln 2 \Leftrightarrow h(x) > \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln \frac{e^x}{e^x + 1} > \ln \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x}{e^x + 1} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$2e^x > e^x + 1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > 0$$

$$E(\Omega) = \int_0^1 \Phi(x) dx = \int_0^1 e^x (x - \ln(e^x + 1) + \ln 2) dx = \int_0^1 (xe^x - e^x \ln(e^x + 1) + e^x \ln 2) dx =$$

$$\int_0^1 xe^x dx - \int_0^1 e^x \ln(e^x + 1) + \int_0^1 e^x \ln 2 dx = \int_0^1 x(e^x)' dx - \int_0^1 (e^x + 1)' \ln(e^x + 1) + \ln 2[e^x]_0^1 =$$

$$[xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx - [(e^x + 1) \ln(e^x + 1)]_0^1 + \int_0^1 (e^x + 1) \frac{e^x}{e^x + 1} dx + \ln 2[e^x]_0^1 =$$

$$= e - ((e+1) \ln(e+1) - 2 \ln 2) + \ln 2(e-1) = e - (e-1) \ln(e+1) + 2 \ln 2 - \ln 2 + e \ln 2 =$$

$$= e - (e+1) \ln(e+1) + \ln 2 + e \ln 2 = e - \ln(e+1)^{e+1} + \ln 2 + \ln 2^e =$$

$$= e - \ln(e+1)^{e+1} + \ln 2 \cdot 2^e = e - \ln(e+1)^{e+1} + \ln 2^{e+1} = \ln \frac{2^{e+1}}{(e+1)^{e+1}} + e$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} \stackrel{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1 = f(0)$$

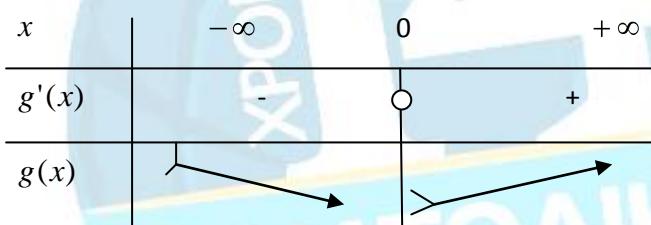
Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$\text{με } g(x) = x \cdot e^x - e^x + 1, \quad x \in R$$

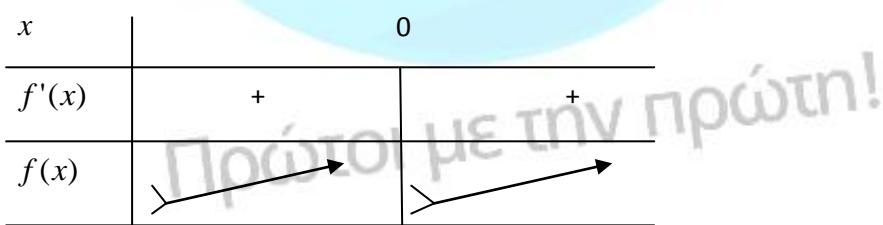
$$g'(x) = e^x + x \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x$$

Άρα:



$$\text{Έχω } g(x) \geq g(0) = 0, \quad x \in R$$

Άρα:



Δηλαδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο R .

Δ2.

1^{ος} τρόπος

$$G(x) = \int_0^x f(u)du \text{ με } G'(x) = f(x) > 0$$

Άρα G ↑ δηλ. 1-1

$$G(1) = \int_0^1 f(u)du = 0$$

$$\text{Άρα: } \int_0^{2f'(x)} f(u)du = 0 \Leftrightarrow G(2f'(x)) = G(1) \Leftrightarrow 2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2}$$

2^{ος} τρόπος

α) f συνεχής στο R και ↓ άρα:

$$f(R) = (\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)) = (0, +\infty)$$

$$\text{Αφού } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x - 1) \cdot \frac{1}{x} = (-1) \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

Άρα $f(x) > 0, x \in R$

Αν υπάρχει $x_0 \in R$ με $2f'(x_0) > 1$

Τότε: $\int_0^{2f'(x_0)} f(u)du > 0$ άτοπο.

Αν υπάρχει $x_0 \in R$ με $2f'(x_0) < 1$

Τότε: $\int_0^{2f'(x_0)} f(u)du < 0$ άτοπο.

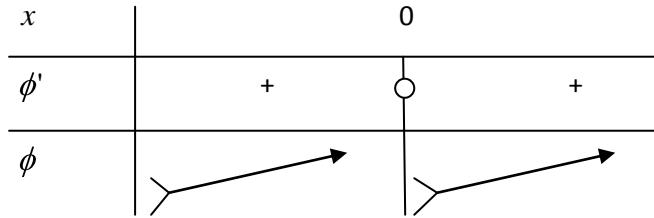
Άρα:

$$2f'(x) = 1 \Leftrightarrow 2f'(x) - 1 = 0 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x \cdot x - e^x + 1}{x^2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x \cdot e^x - 2e^x + 2 - x^2 = 0$$

Προφανής ρίζα $x=0$

Έστω $\phi(x) = 2xe^x - 2e^x + 2 - x^2$, $x \in R$

$$\phi'(x) = 2e^x + 2xe^x - 2e^x - 2x = 2x \cdot (e^x - 1)$$



Άρα η $x=0$ μοναδική ρίζα.

β) Έχω $y(t) = f(t)$ άρα:

$$y(t) = \begin{cases} \frac{e^{x(t)} - 1}{x(t)}, & x(t) \neq 0 \\ 1, & x(t) = 0 \end{cases}$$

Θέλω $x'(t) = 2y'(t)$

Άρα έχοντας

$$f(x(t)) = y(t)$$

$$f'(x(t)) \cdot x'(t) = y'(t) = \frac{1}{2} x'(t)^{x'(t) \neq 0} \Leftrightarrow f'(x(t)) = \frac{1}{2}$$

Άρα $x(t) = 0$ από Δ. 2^a, άρα $y(t) = 1$ δηλαδή έχω το σημείο $M(0, 1)$.

Δ3.

$$g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 \cdot (x - 2)^2 = (x \cdot \frac{e^x - 1}{x} + 1 - e)^2 \cdot (x - 2)^2 = (e^x - e)^2 \cdot (x - 2)^2$$

$$g'(x) = 2(e^x - e) \cdot e^x \cdot (x - 2)^2 + (e^x - e)^2 \cdot 2(x - 2) = 2(e^x - e) \cdot (x - 2) \cdot [e^x \cdot (x - 2) + e^x - e]$$

$$= 2(e^x - e) \cdot (x - 2) \cdot (x \cdot e^x - 2e^x + e^x - e) = 2(e^x \underset{1}{\downarrow} - e) \cdot (x \underset{2}{\downarrow} - 2) \cdot (x \cdot e^x - e^x - e)$$

$$K(x) = x \cdot e^x - e^x - e$$

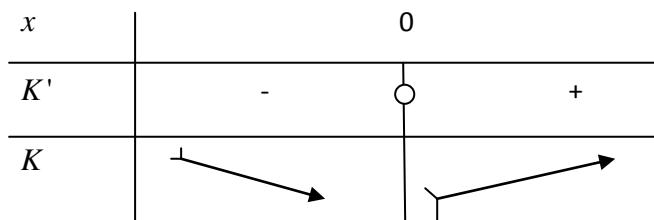
$$K'(x) = x \cdot e^x$$

$$K(1) = -e < 0$$

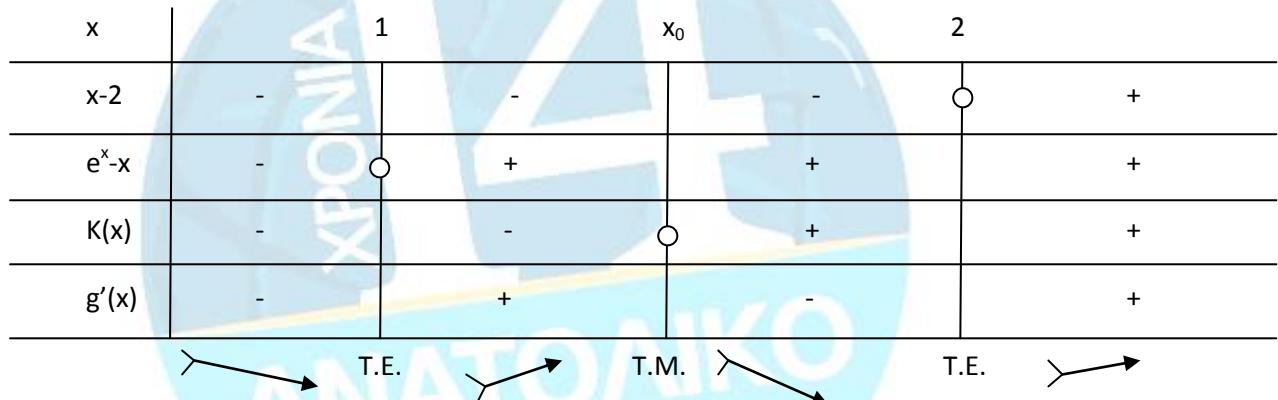
$$K(2) = 2e^x - e^x - e = e^x - e > 0$$

$K(1) \cdot K(2) < 0$ Από Θ. Bolzano

υπάρχει: $x_0 \in (1, 2) : K(x_0) = 0$



Στο $(1, 2)$ η $\kappa(x)$ είναι 1-1 άρα η ρίζα x_0 είναι μοναδική



Πρώτοι με την πρώτη!