**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ Γ΄ΛΥΚΕΙΟΥ**

**ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2014

**ΘΕΜΑ Α**

**Α1.** Απόδειξη σχολικού βιβλίου: σελ. 251

**Α2.** Ορισμός σχολικού βιβλίου: σελ. 273

…, αν η f΄ είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του Δ

**Α3.** Ορισμός σχολικού βιβλίου: σελ. 150

…, όταν f(x)$\leq f(x_0)$ για κάθε $x \in A$

**Α4.** Λ αφού $z - \bar{z} = 2\,\mathrm{Im}(z)i$

Σ σελ. 178

Σ σχόλιο σελ. 260

Σ θεώρημα 2$^{ο}$ σελ. 332

Λ σχόλιο σελ. 254

**ΘΕΜΑ Β**

**Β1.** $2|z|^2 + (z+\bar{z})i - 4i = 0$

$2x^2 + 2y^2 + 2xi - 4 - 2i = 0$

$2x^2 + 2y^2 - 4 + (2x-2)i = 0$

$x^2 + y^2 = 2$ πρέπει και x=1 , y= $\pm 1$

Επομένως $z_1$=1+i και $z_2$=1-i

**Β2.** $\omega = 3(\frac{z_1}{z_2})^{39}$

$= 3(\frac{1+i}{1-i})^{39}$

$= 3(\frac{1-1+2i}{2})^{39} = 3i^{39} = -3i$

**Β3.**

$$|u+\omega| = |4z_1 - z_2 - i|$$

$$|u-3i| = |4+4i-1+i-i|$$

$$|u-3i| = |3+4i|$$

$$|u-3i| = 5$$

γεωμετρικός τόπος των εικόνων του u είναι κύκλος με: Κ(0,3), R=5

**ΘΕΜΑ Γ**

Γ1. h(x)= $x - \ln(e^x+1),\ x \in \Re$

$$h(x) = \ln\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}$$

$$h''(x) = -\frac{e^x}{(e^x+1)^2} < 0 \text{ για κάθε } x \in \Re$$

Γ2. $h(x) = x - \ln(e^x+1) = \ln e^x - \ln(e^x+1) = \ln\frac{e^x}{e^x+1}, x \in \Re$

$$h'(x) = 1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}$$

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \qquad h'(0) = \frac{1}{2}$$

$$\ln e^{h(2h'(x))} < \ln\frac{e}{e+1} \Leftrightarrow h(2h'(x)) < h(1) \Leftrightarrow 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h'(x) < h'(0) \underset{\Re}{\overset{h'\downarrow}{\Leftrightarrow}} x > 0$$

Γ3. $\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \ln\frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{u\to1} \ln u = 0$

Άρα y=0 οριζόντια στο $+\infty$

$$u = \frac{e^x}{e^x+1}$$

$$u_0 = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x} = 1$$

$$u \to 1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{h(x)}{x}=\lambda$$

$$\lambda=\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{\ln(e^x+1)}{x}=\lim_{x\to-\infty}(1-\frac{1}{x}\cdot\ln(e^x+1))=1$$

$$\beta=\lim_{x\to-\infty}[x-\ln(e^x+1)-x]=\lim_{x\to-\infty}[-\ln(e^x+1)]=0$$

Άρα η y=x

Γ4. $\Phi(x)=e^x(h(x)+\ln 2),\ x\in\Re$

$$\Phi(x)=0$$

$$h(x)+\ln 2=0$$

$$h(x)=-\ln 2$$

$$h(x)=\ln\frac{1}{2}$$

$$\ln\frac{e^x}{e^x+1}=\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{e^x}{e^x+1}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 2e^x=e^x+1\Leftrightarrow e^x=1\Leftrightarrow x=0$$

$$E(\Omega)=\int_0^1|\Phi(x)|\,dx$$

$e^x>0$, για κάθε $x\in\Re$

$$h(x)+\ln 2>0\Leftrightarrow h(x)>-\ln 2\Leftrightarrow h(x)>\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow\ln\frac{e^x}{e^x+1}>\ln\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{e^x}{e^x+1}>\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$$2e^x>e^x+1\Leftrightarrow e^x>1\Leftrightarrow x>0$$

$$E(\Omega)=\int_0^1\Phi(x)dx=\int_0^1 e^x(x-\ln(e^x+1)+\ln 2)dx=\int_0^1(xe^x-e^x\ln(e^x+1)+e^x\ln 2)dx=$$

$$\int_0^1 xe^x dx-\int_0^1 e^x\ln(e^x+1)+\int_0^1 e^x\ln 2dx=\int_0^1 x(e^x)'dx-\int_0^1(e^x+1)'\ln(e^x+1)+\ln 2[e^x]_0^1=$$

$$[xe^x]_0^1-\int_0^1 e^x dx-[(e^x+1)\ln(e^x+1)]_0^1+\int_0^1(e^x+1)\frac{e^x}{e^x+1}dx+\ln 2[e^x]_0^1=$$

$$=e-((e+1)\ln(e+1)-2\ln 2)+\ln 2(e-1)=e-(e-1)\ln(e+1)+2\ln 2-\ln 2+e\ln 2=$$

$$=e-(e+1)\ln(e+1)+\ln 2+e\ln 2=e-\ln(e+1)^{e+1}+\ln 2+\ln 2^e=$$

$$=e-\ln(e+1)^{e+1}+\ln 2\cdot 2^e=e-\ln(e+1)^{e+1}+\ln 2^{e+1}=\ln\frac{2^{e+1}}{(e+1)^{e+1}}+e$$

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.**

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} \underset{\Delta.\Gamma.\Lambda}{\overset{\frac{0}{0}}{=}} \lim_{x\to 0} e^x = e^0 = 1 = f(0)$$

Άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

$$f'(x) = \frac{xe^x - (e^x - 1)}{x^2} = \frac{xe^x - e^x + 1}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

με $g(x) = x \cdot e^x - e^x + 1, \quad x \in R$

$$g'(x) = e^x + x \cdot e^x - e^x = x \cdot e^x$$

Άρα:

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | - | 0 | + |
| $g(x)$ | ↘ | | ↗ |

Έχω $g(x) \geq g(0) = 0, \qquad x \in R$

Άρα:

| $x$ | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | | + |
| $f(x)$ | ↗ | | ↗ |

Δηλαδή η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $R$ .

**Δ2.**

**1ος τρόπος**

$G(x)=\int_1^x f(u)du$ με $G'(x)=f(x)>0$

Άρα $G\uparrow$ δηλ. 1-1

$G(1)=\int_1^1 f(u)du=0$

Άρα: $\int_1^{2f'(x)} f(u)du=0 \Leftrightarrow G(2f'(x))=G(1) \Leftrightarrow 2f'(x)=1 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2}$

**2ος τρόπος**

α) f συνεχής στο R και $\uparrow$ άρα:

$f(R)=(\lim\limits_{x\to-\infty} f(x), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x))=(0,\ +\infty)$

Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}(e^x-1)\cdot\frac{1}{x}=(-1)\cdot 0=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x}\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$

Άρα $f(x)>0,\ x\in R$

Αν υπάρχει $x_0\in R$ με $2f'(x_0)>1$

Τότε: $\int_1^{2f'(x_0)} f(u)du>0$ άτοπο.

Αν υπάρχει $x_0\in R$ με $2f'(x_0)<1$

Τότε: $\int_1^{2f'(x_0)} f(u)du<0$ άτοπο.

Άρα:

$2f'(x)=1 \Leftrightarrow 2f'(x)-1=0 \Leftrightarrow f'(x)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{e^x\cdot x-e^x+1}{x^2}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2x\cdot e^x-2e^x+2-x^2=0$

Προφανής ρίζα χ=0

Έστω $\phi(x) = 2xe^x - 2e^x + 2 - x^2, \quad x \in R$

$$\phi'(x) = 2e^x + 2xe^x - 2e^x - 2x = \underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{2x} \cdot (\underset{\substack{\downarrow \\ 0}}{e^x - 1})$$

| $x$ | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $\phi'$ | + | 0 | + |
| $\phi$ | ↗ | | ↗ |

Άρα η χ=0 μοναδική ρίζα.

**β)** Έχω $y(t) = f(t)$ άρα:

$$y(t) = \begin{cases} \dfrac{e^{x(t)} - 1}{x(t)}, & x(t) \neq 0 \\ 1\ , & x(t) = 0 \end{cases}$$

Θέλω $x'(t) = 2y'(t)$

Άρα έχοντας

$$f(x(t)) = y(t)$$

$$f'(x(t)) \cdot x'(t) = y'(t) = \frac{1}{2}x'(t) \overset{x'(t)\neq 0}{\Longleftrightarrow} f'(x(t)) = \frac{1}{2}$$

Άρα $x(t) = 0$ από Δ. 2$^{\alpha}$, άρα $y(t) = 1$ δηλαδή έχω το σημείο Μ(0, 1).

**Δ3.**

$$g(x) = (xf(x) + 1 - e)^2 \cdot (x-2)^2 = (x \cdot \frac{e^x - 1}{x} + 1 - e)^2 \cdot (x-2)^2 = (e^x - e)^2 \cdot (x-2)^2$$

$$g'(x) = 2(e^x - e) \cdot e^x \cdot (x-2)^2 + (e^x - e)^2 \cdot 2(x-2) = 2(e^x - e) \cdot (x-2) \cdot [e^x \cdot (x-2) + e^x - e]$$

$$= 2(e^x - e) \cdot (x-2) \cdot (x \cdot e^x - 2e^x + e^x - e) = 2(\underset{\substack{\downarrow \\ 1}}{e^x - e}) \cdot (\underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{x - 2}) \cdot (x \cdot e^x - e^x - e)$$

$$K(x) = x \cdot e^x - e^x - e$$

$$K'(x) = x \cdot e^x$$

$$K(1) = -e < 0$$

$K(2) = 2e^x - e^x - e = e^x - e > 0$

$K(1) \cdot K2) < 0$ Από Θ. Bolzano

υπάρχει: $x_0 \in (1,\ 2) : K(x_0) = 0$

| $x$ | | 0 | |
|---|---|---|---|
| $K'$ | - | ○ | + |
| $K$ | ↘ | | ↗ |

Στο (1,2) η κ(x) είναι 1-1 άρα η ρίζα $x_0$ είναι μοναδική

| x | | 1 | | $x_0$ | | 2 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| x-2 | - | | - | | - | ○ | + |
| $e^x$-x | - | ○ | + | | + | | + |
| K(x) | - | | - | ○ | + | | + |
| g'(x) | - | | + | | - | | + |
| | ↘ | Τ.Ε. | ↗ | Τ.Μ. | ↘ | Τ.Ε. | ↗ |