ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2011
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία (σχολ. Βιβλίο σελ. 260)

Α2. Θεωρία (σχολ. Βιβλίο σελ. 280)

Α3. α) Σ β)Σ γ)Λ δ)Λ ε)Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1. $|z-3i|+|\bar{z}+3i|=2$ (1)

Ισχύει ότι: $|\bar{z}+3i|=|\overline{\bar{z}+3i}|=|z-3i|$

Άρα η (1) γίνεται: $|z-3i|+|z-3i|=2\Rightarrow 2|z-3i|=2\Rightarrow |z-3i|=1$

Άρα γ.τ. των Μ(z) είναι ο κύκλος με Κ(0,3) και ρ=1.

Β2. Ν.Δ.Ο $\bar{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$

Από Β1. ισχύει $|z-3i|=1\Rightarrow +|z-3i|^2=1\Rightarrow (z-3i)\left(\overline{z-3i}\right)=1\Rightarrow (z-3i)\left(\overline{z-3i}\right)=1$

$\Rightarrow (z-3i)\left(\bar{z}+3i\right)=1\Rightarrow \bar{z}+3i=\dfrac{1}{z-3i}$ αφού $z\neq 3i$

Β3. $w=z-3i+\dfrac{1}{z-3i}\overset{B2}{=}z-3i+\bar{z}+3i=z+\bar{z}=2\,\mathrm{Re}(z)$

Άρα $w\in R$

Άρα $-1\le \mathrm{Re}(z)\le 1\Rightarrow -2\le 2\,\mathrm{Re}(z)\le 2\Rightarrow -2\le w\le 2$

Β4. $|z-w|=|z-2\,\mathrm{Re}(z)|\overset{z=x+yi}{=}|x+yi-2x|=|-x+yi|=|x-yi|=|\bar{z}|=|z|$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $e^x\left(f'(x)+f''(x)-1\right)=f'(x)+xf''(x)$

$e^x f'(x)+e^x f''(x)-e^x=f'(x)+xf''(x)$

$\left(e^x f'(x)-e^x\right)'=\left(xf'(x)\right)'$

Άρα $e^x f'(x)-e^x=xf'(x)+c_1$ (1)

Έχω για χ=0: $1\cdot f'(0)-1=0\cdot f'(0)+C_1$

$1\cdot 0-1=0+C_1\Leftrightarrow C_1=-1$

Αντικαθιστώ στην (1):

$$e^x f'(x) - e^x = xf'(x) - 1 \Leftrightarrow f'(x)e^x - xf'(x) = e^x - 1 \Leftrightarrow f'(x)\left(e^x - x\right) = e^x - 1 \Leftrightarrow$$

$$f'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}\ ^* \text{ άρα } \left(f(x)\right)' = \frac{\left(e^x - x\right)'}{e^x - x} \text{ οπότε } f(x) = \ln\left|e^x - x\right| + C \text{ και } C \in R$$

Έχω για χ=0: $f(0) = \ln\left(e^0 - 0\right) + C$ άρα $0 = 0 + C \Leftrightarrow C = 0$

Άρα $f(x) = \ln\left|e^x - x\right|$

Βρίσκω το πρόσημο της $h(x) = e^x - x$

$h(x) = e^x - x$ και $x \in R$

$h'(x) = e^x - 1$

$h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h'(x)		-	0	+	
h(x)		↘	Ο.Ε. 1	↗	

$h(0) = 1$ άρα $h(x) \geq h(0) = 1$ άρα $h(x) \geq 1$ οπότε $h(x) > 0,$ για κάθε $x \in R$ οπότε $e^x - x > 0,^*$ για κάθε $x \in R$

Επομένως $f(x) = \ln\left(e^x - x\right)$ και $x \in R$.

Γ2. $f'(x) = \frac{1}{e^x - x}\left(e^x - x\right)' = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$ όπου $e^x - x > 0$ για κάθε $x \in R$ από Γ1.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)		↘	Ο.Ε. 0	↗	

ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ ΧΡΟΝΙΑ 12 Πρώτοι με την πρώτη!

$f(0)=\ln\left(e^0-0\right)=\ln 1=0$

Άρα η f στο $\Delta_1=\left(-\infty,0\right]$ είναι γνησίως φθίνουσα και στο $\Delta_2=\left[0,+\infty\right)$ είναι γνησίως αύξουσα.
Στο $x_0=0$ η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο ίσο με 0.

Γ3.

$$f''(\mathrm{x})=\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{x}}-xe^x-1}{\left(e^x-x\right)^2}$$

Θεωρώ $\varphi(x)=2e^x-xe^x-1,\ \ x\in R$

$\varphi'(x)=-e^x-xe^x+2e^x=e^x-xe^x=e^x\left(1-x\right)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
φ'(x)		+	0	-	
φ(x)		↗	O.M. e-1	↘	

$\varphi(1)=-e+2e-1=e-1$

Έχοντας τη φ συνεχή στο R:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-xe^x+2e^x-1\right)=0+0-1=$-1

Αφού $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x}{e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{-e^{-x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(-e^x\right)=0$

Ανάλογα:

$\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-xe^x+2e^x-1\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(-x+2-\dfrac{1}{e^x}\right)=-\infty$

Άρα

$\phi\left(\left(-\infty,1\right]\right)$ ↗ $=\left(\lim\limits_{x\to-\infty}\phi(\mathrm{x}),\varphi(1)\right]=\left(-1,e-1\right]$

Άρα υπάρχει μία ακριβώς ρίζα x_1<1

Και φ $\left(\left(1,+\infty\right)\right)$ ↘ $=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}\phi(\mathrm{x}),\lim\limits_{x\to1^+}\phi(\mathrm{x})\right)=\left(-\infty,e-1\right)$

΄Αρα υπάρχει μια ακριβώς ρίζα $x_2>1$

Έχω για τη φ:

x	$-\infty$	x_1	1	x_2	$+\infty$
φ(x)	↗	0	0,M e-1	0	↘
f''(x)	-	0	+	0	-
f(x)	↘	Σ.Κ	↗	Σ.Κ	↘

Γ4. Θεωρώ $g(x)=\ln\left(e^x-x\right)-\sigma\upsilon\nu x,\ \ x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ με g συνεχής ως διαφορά συνεχών συναρτήσεων

Έχω $g(0)=\ln\left(e^0-0\right)-\sigma\upsilon\nu 0=-1<0$

και

$$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\left(e^{\pi/2}-\frac{\pi}{2}\right)-\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2}=\ln\left(e^{\pi/2}-\frac{\pi}{2}\right)>0$$

αφού $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\ln\left(e^{\pi/2}-\frac{\pi}{2}\right)>0$ (από Γ2)

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$

Μοναδικότητα ρίζας:

$$g'(x)=\frac{e^x-1}{e^x-x}+\eta\mu x=f'(x)+\eta\mu x$$

Ισχύει $f'(x)>0,\ \ x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ οπότε $g'(x)>0$ στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Άρα η g έχει ακριβώς μία λύση στο $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1) $\dfrac{1-f(x)}{e^{2x}}=\displaystyle\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1-f(x)=e^{2x}\displaystyle\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt \Leftrightarrow$

$f(x)=1-e^{2x}\displaystyle\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$

u=x+t, άρα du=(x+t)΄dt=dt και u-x=t και

t	0	-x
u	x	0

t=0 $\Rightarrow$ u=x

t=-x $\Rightarrow$ u=0

άρα

$f(x)=1-e^{2x}\displaystyle\int_x^{0}\frac{e^{2(u-x)}}{g(u)}du \Leftrightarrow$

$f(x)=1+e^{2x}\displaystyle\int_0^{x}\frac{e^{2u}}{g(u)}\frac{1}{e^{2x}}du \Leftrightarrow$

$f(x)=1+\displaystyle\int_0^{x}\frac{e^{2u}}{g(u)}du$ (1)

f παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων έχοντας $\dfrac{e^{2u}}{g(u)}$ συνεχή ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων.

$\dfrac{1-g(x)}{e^{2x}}=\displaystyle\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$

Ομοίως u=x+t, t=u-x, du=dt,

t	0	-x
u	x	0

$1-g(x)=e^{2x}\displaystyle\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$

$g(x)=1-e^{2x}\displaystyle\int_0^{-x}\frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$

$g(x)=1-e^{2x}\displaystyle\int_x^{0}\frac{e^{2(u-x)}}{f(u)}du \Leftrightarrow$

$g(x)=1+\dfrac{e^{2x}}{e^{2x}}\displaystyle\int_0^{x}\frac{e^{2u}}{f(u)}du \Leftrightarrow$

$g(x)=1+\displaystyle\int_0^{x}\frac{e^{2a}}{f(u)}du$ (2)

g παραγωγίσιμη ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων έχω:

$$\left.\begin{array}{l}(1):\ f'(x)=\dfrac{e^{2x}}{g(x)} \Leftrightarrow f'(x)g(x)=e^{2x}\\ \text{και}\ g'(x)=\dfrac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)g'(x)=e^{2x}\end{array}\right\}$$

ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΟ
Πρώτοι με την πρώτη!

$f'(x)g(x) = f(x)g'(x) \Leftrightarrow f'(x)g(x) - f(x)g'(x) = 0$

$\overset{:g^2(x)>0}{\Rightarrow} \left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = 0,$ άρα $\dfrac{f(x)}{g(x)} = c \Rightarrow f(x) = c \cdot g(x)$, (3) $C \in R$, $x \in R$

Έχω f(0) =1 (από (1)) και g(0)=1 (από (2))

Άρα (3): f(0)=cg(0)$\Rightarrow$c=1

Από (3): f(x)=g(x)

Δ2) Έχω από (1): $f(x) = 1 + \int_0^x \dfrac{e^{2u}}{f(u)} du \Rightarrow$

$f'(x) = \dfrac{e^{2x}}{f(x)} \Leftrightarrow f(x)f'(x) = e^{2x}$

$2f(x)f'(x) = 2e^{2x}$

Άρα $\left(f^2(x)\right)' = \left(e^{2x}\right)'$

$f^2(x) = e^{2x} + \kappa,\ \kappa \in R$

Για x=0

$f^2(0) = e^0 + \kappa, 1 = 1 + \kappa, \kappa = 0$

Άρα $f^2(x) = e^{2x}$ (4)

Από (4), έχω f(x)=e^x (f(x)>0 από υπόθεση)

Δ3) $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{\ln e^x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{x}{e^{\frac{1}{x}}} = \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} \overset{\left(\frac{+\infty}{-\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{e^{-\frac{1}{x}} \cdot \frac{1}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x\to 0^-}\left(-e^{-\frac{1}{x}}\right) = -\infty$

Δ4) $E = \int_0^1 |F(x)|dx = \int_0^1 (-F(x))dx = \int_0^1 1(-F(x))dx =$

$\int_0^1 (x)'(-F(x))dx = [-xF(x)]_0^1 = -F(1) + \int_0^1 xF'(x)dx =$

$= \int_0^1 x \cdot f(x^2)dx$

$= \dfrac{1}{2}\int_0^1 2x \cdot f(x^2)dx$

$= \dfrac{1}{2}\int_0^1 2x \cdot e^{x^2} dx$

$= \dfrac{1}{2}\int_0^1 \left(e^{x^2}\right)' dx = +\dfrac{1}{2}\left[e^{x^2}\right]_0^1$

$= \dfrac{1}{2}\left(e^1 - e^0\right) = +\dfrac{1}{2}(e-1) = \dfrac{e-1}{2}$ τ.μ

Πρόσημο της F με x>0 έχω f|(t^2)>0 (υπόθεση), άρα F(x)>0 ενώ F(x)<0, όταν 0<x<1.