

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 9/6/2017

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεώρημα §2.6

Έστω $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$...οπότε $f(x_1) < f(x_2)$

A2. α. Ψ

β. π.χ. η συνάρτηση $f(x) = |x|$ είναι συνεχής όμως δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

A3. §1.8

Μία συνάρτηση f θα λέμε ότι είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$, όταν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του (a, b) και επιπλέον $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

$$\lim_{x \rightarrow b^-} f(x) = f(b)$$

A4. α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Σωστό

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1. $f(x) = \ln x, x > 0$

$$g(x) = \frac{x}{1-x}, x \neq 1$$

Για να ορίζεται η fog πρέπει και αρκεί:

$x \neq 1$ και $g(x) > 0$, άρα $\frac{x}{1-x} > 0$ για $x \neq 1$ έχουμε:

$$x(1-x) > 0 \Leftrightarrow x \in (0,1)$$

Οπότε $x \in (0,1)$, άρα $Df \circ g = (0,1)$

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \ln \frac{x}{1-x}, x \in (0,1)$$

$$B2. h(x) = (f \circ g)(x) = \ln \frac{x}{1-x}, x \in (0,1)$$

Για κάθε $x_1, x_2 \in (0,1)$ με $h(x_1) = h(x_2)$ ισχύει $\ln \frac{x_1}{1-x_1} = \ln \frac{x_2}{1-x_2}$, άρα

$$\frac{x_1}{1-x_1} = \frac{x_2}{1-x_2} \Leftrightarrow x_1(1-x_2) = x_2(1-x_1) \Leftrightarrow x_1 - x_1x_2 = x_2 - x_1x_2 \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Άρα η h είναι 1-1 οπότε και αντιστρέψιμη.

$$\begin{aligned} y = h(x) &\Leftrightarrow y = \ln \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow e^y = \frac{x}{1-x} \Leftrightarrow e^y(1-x) = x \Leftrightarrow e^y - e^y x = x \Leftrightarrow e^y = x + e^y x \\ &\Leftrightarrow e^y = x(1+e^y) \Leftrightarrow x = \frac{e^y}{1+e^y} \end{aligned}$$

και $x \in (0,1)$

Ισχύει ότι $x \in (0,1)$ οπότε: $0 < \frac{e^y}{1+e^y} < 1$

Άρα $\frac{e^y}{1+e^y} > 0$ που ισχύει για κάθε $y \in \mathbb{R}$ και

$$\frac{e^y}{1+e^y} < 1 \Leftrightarrow \frac{e^y - 1 - e^y}{1+e^y} < 0 \Leftrightarrow \frac{-1}{1+e^y} < 0 \text{ που ισχύει, γιατί } 1+e^y > 0, \text{ για κάθε } y \in \mathbb{R}$$

$$\text{Οπότε } h^{-1}(y) = \frac{e^y}{1+e^y}, y \in \mathbb{R} \text{ και } h^{-1}(x) = \frac{e^x}{1+e^x}, x \in \mathbb{R}$$

$$B3. \text{ } \phi \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } \phi'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \cdot e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Οπότε ϕ γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και δεν έχει ακρότατα.

$$\text{Η } \phi' \text{ παραγωγίσιμη στο } \mathbb{R} \text{ με } \phi''(x) = \frac{e^x \cdot (1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

Πρόσημο ϕ''

$e^x > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$(1+e^x)^3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$1-e^x > 0 \Leftrightarrow 1 > e^x \Leftrightarrow x < 0$

Οπότε $\phi(x)'' > 0$ στο $(-\infty, 0)$ και $\phi''(x) < 0$ στο $(0, +\infty)$

και ϕ συνεχής στο $(-\infty, 0]$ και στο $[0, +\infty)$

ϕ κυρτή στο $(-\infty, 0]$, ϕ κοίλη στο $[0, +\infty)$.

Η ϕ δέχεται εφαπτομένη στο $x_0=0$ αφού παραγωγίζεται άρα η ϕ έχει καμπή στο σημείο

$A(0, \Phi(0))$ με $\phi(0) = \frac{1}{2}$

B4.

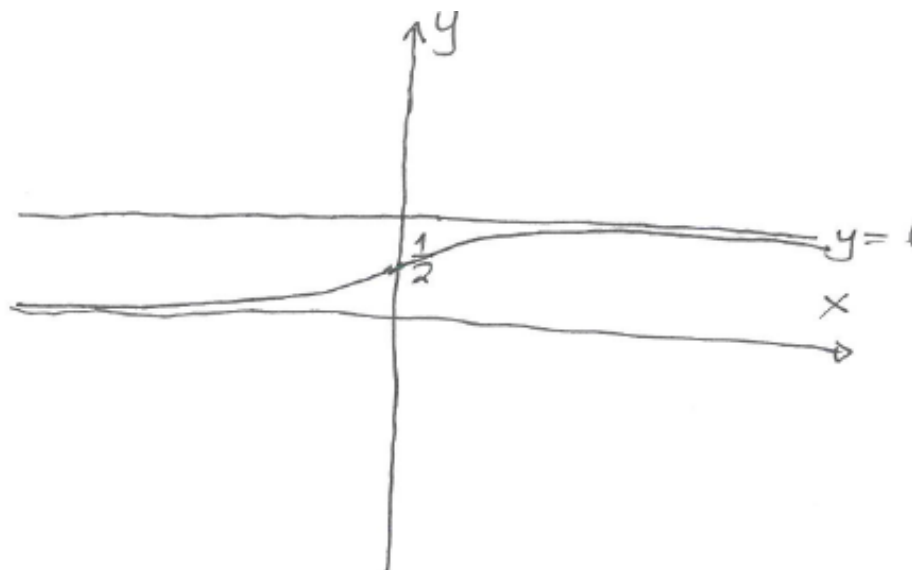
Οριζόντιες

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 0$$

Η $y=0$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_ϕ στο $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1+e^x} = 1$$

Η $y=1$ είναι οριζόντια ασύμπτωτη της C_ϕ στο $+\infty$



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Έστω $M(x_0, f(x_0))$ σημείο επαφής της C_f και της εφαπτομένης τότε

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ άρα } y - \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0(x - x_0)$$

Η εφαπτόμενη διέρχεται από το $A\left(\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$

$$\text{Άρα } -\frac{\pi}{2} + \eta\mu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0 = -\sigma\upsilon\nu x_0\left(\frac{\pi}{2} - x_0\right)$$

$$\eta\mu x_0 + \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x_0 - x_0\sigma\upsilon\nu x_0 - \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\text{Θεωρώ } \Phi(x) = \eta\mu x + \frac{\pi}{2}\sigma\upsilon\nu x - x\sigma\upsilon\nu x - \frac{\pi}{2} \text{ και } x \in [\pi, 0]$$

Παρατηρούμε ότι:

$$\Phi(0)=0 \text{ και } \Phi(\pi)=0$$

Για να αποδείξουμε ότι οι λύσεις είναι ακριβώς 2 παίρνουμε μονοτονία της Φ

Φ παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$

$$\Phi'(x) = \eta\mu x \left(x - \frac{\pi}{2}\right), x \in [0, \pi]$$

$$\eta\mu x \geq 0 \text{ για } x \in [0, \pi]$$

Οπότε

$$\Phi'(x) > 0 \text{ για } x > \frac{\pi}{2} \text{ και } \Phi'(x) < 0 \text{ για } x < \frac{\pi}{2}$$

$$\Phi \text{ συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο } \Delta_1 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{Άρα } \Phi(\Delta_1) = \left[\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right), \Phi(0)\right] \text{ με } \Phi(0)=0 \text{ και } \Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Άρα } \Phi(\Delta_1) = \left[1 - \frac{\pi}{2}, 0\right]$$

$$\Phi \text{ συνεχής και γνησίως αύξουσα στο } \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

$$\text{Άρα } \Phi(\Delta_2) = \left[\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right), \Phi(\pi) \right] = \left[1 - \frac{\pi}{2}, 0 \right]$$

$0 \in \Phi(\Delta_1)$ οπότε $x=0$ μοναδική ρίζα της $\Phi(x)=0$, στο Δ_1

$0 \in \Phi(\Delta_2)$ οπότε $x=\pi$ μοναδική ρίζα της $\Phi(x)=0$, στο Δ_2

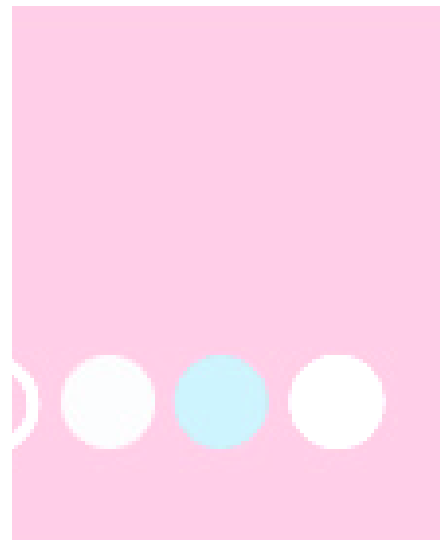
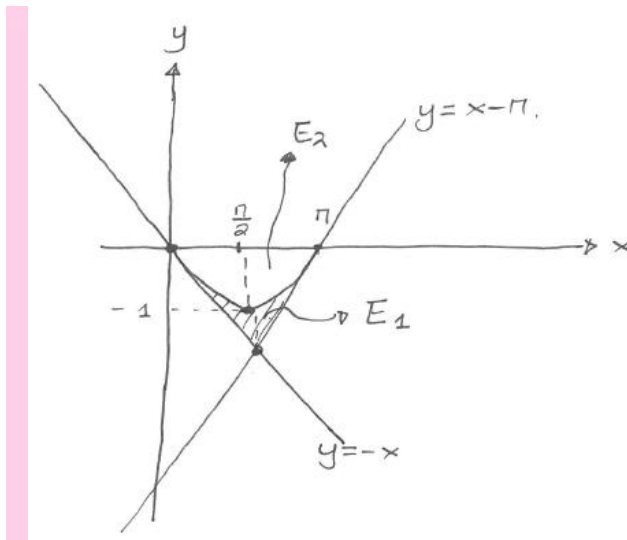
Οπότε οι εφαπτόμενες της C_Φ στα $M_1(0, f(0))$ και $M_2(\pi, f(\pi))$

$$(\varepsilon_1): y - \Phi(0) = \Phi'(0)(x - 0)$$

$$y = -x \text{ και}$$

$$(\varepsilon_2): y - \Phi(\pi) = \Phi'(\pi)(x - \pi)$$

$$y = x - \pi$$



Γ2.

$$\begin{aligned} E_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x) - (-x)) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (f(x) - x + \pi) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\eta \mu x + x) dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-\eta \mu x - x + \pi) dx = \\ &= \left[\sigma \upsilon \nu x + \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \left[\sigma \upsilon \nu x - \frac{x^2}{2} + \pi x \right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = \sigma \upsilon \nu \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8} - \sigma \upsilon \nu 0 + \sigma \upsilon \nu \pi - \frac{\pi^2}{2} + \pi - \\ &- \sigma \upsilon \nu \frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{8} - 1 - 1 - \frac{\pi^2}{2} + \pi + \frac{\pi^2}{8} - \frac{\pi^2}{2} = \frac{\pi^2}{4} - 2 \text{ τετρ. μονάδες.} \end{aligned}$$

$$E_2 = \int_0^{\pi} -(-\eta\mu x)dx = \int_0^{\pi} \eta\mu x dx = -[\sigma\upsilon\nu x]_0^{\pi} = -\sigma\upsilon\nu\pi + \sigma\upsilon\nu 0 = 1+1=2 \text{ τετρ. μονάδες}$$

$$\text{Άρα } \frac{E_1}{E_2} = \frac{\frac{\pi^2}{4} - 2}{2} = \frac{\frac{\pi^2 - 8}{4}}{2} = \frac{\pi^2 - 8}{8} = \frac{\pi^2}{8} - 1$$

Γ3.

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{f(x) + x}{f(x) - x + \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{-\eta\mu x + x}{-\eta\mu x - x + \pi} = +\infty$$

$$\text{Γιατί: } \lim_{x \rightarrow \pi} (-\eta\mu x + x) = \pi,$$

$$\text{Και } \lim_{x \rightarrow \pi} (-\eta\mu x - x + \pi) = 0 \text{ και } -\eta\mu x > x - \pi, \text{ άρα } -\eta\mu x - x + \pi > 0 \text{ για } x \rightarrow \pi^-$$

Γ4.

Για $1 \leq x \leq e$ η f είναι κυρτή οπότε:

$$f(x) \geq x - \pi,$$

Άρα με $x > 0$ ισχύει $\frac{f(x)}{x} \geq \frac{x - \pi}{x}$, με την ισότητα να ισχύει μόνο για $x = \pi$ και με $\frac{f(x)}{x}, \frac{x - \pi}{x}$ συνεχείς:

$$\text{Οπότε } \int_1^e \frac{f(x)}{x} dx > \int_1^e \left(1 - \frac{\pi}{x}\right) dx = [x - \pi \ln|x|]_1^e = e - \pi \ln e - 1 = e - \pi - 1$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η f είναι συνεχής στο $[-1,0)$ ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων και στο $(0,\pi]$ ως γινόμενο συνεχών συναρτήσεων.

$$\text{Με } x \in [-1,0), \text{ έχω } f(x) = \sqrt[3]{x^4} = \sqrt[3]{|x|^4} = |x|^{\frac{4}{3}} = (-x)^{\frac{4}{3}}, \text{ άρα}$$

$$f(x) = \begin{cases} (-x)^{\frac{4}{3}}, & x \in [-1,0) \\ e^x \eta\mu x, & x \in [0,\pi] \end{cases}$$

Στο $x_0 = 0$, έχω $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0) = 0$, άρα η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Επομένως η f είναι συνεχής στο $[-1, \pi]$

$$\text{Με } x \in [-1, 0), \text{ έχω } f'(x) = \left[(-x)^{\frac{4}{3}} \right]' = -\frac{4}{3} \sqrt[3]{-x}$$

$$\text{ενώ με } x \in (0, \pi], \text{ έχω } f'(x) = e^x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x)$$

Στο $x_0 = 0$, έχω

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{x} = -\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(-x)^{\frac{4}{3}}}{-x} = -\lim_{x \rightarrow 0^-} (-x)^{\frac{1}{3}} = -\lim_{x \rightarrow 0^-} \sqrt[3]{-x^1} = -0 = 0$$

$$\text{και } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x \eta\mu x}{x} = e^0 1 = 1$$

$$\text{άρα } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}$$

Δηλαδή η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0 = 0$

$$\text{Επομένως } f'(x) = \begin{cases} -\frac{4}{3} \sqrt[3]{-x}, & x \in [-1, 0) \\ e^x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x), & x \in (0, \pi] \end{cases}$$

Άρα για τα κρίσιμα σημεία έχω:

$$\text{Με } x \in [-1, 0), \text{ έχω } f'(x) < 0, \text{ ενώ}$$

$$\text{Με } x \in (0, \pi),$$

έχω

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x (\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x) = 0 \text{ και } x \in (0, \pi) \Leftrightarrow \varepsilon\phi x = -1 \text{ και } x \in (0, \pi) \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{4}$$

Άρα κρίσιμα σημεία της f είναι $x=0$ (δεν παραγωγίζεται αλλά είναι συνεχής)

$$\text{και } x = \frac{3\pi}{4} \text{ (ρίζα της } f')$$

Δ2.

$$\text{Έχω με } x \in (0, \pi), \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x > 0 \text{ στο } \left(0, \frac{3\pi}{4}\right) \text{ και } \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x < 0 \text{ στο } \left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$$

Η f είναι συνεχής στο $[-1,0]$ και $f'(x) < 0$ στο $(-1,0)$, η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-1,0]$

Η f είναι συνεχής στο $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$ και $f'(x) > 0$ στο $\left(0, \frac{3\pi}{4}\right)$ άρα είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[0, \frac{3\pi}{4}\right]$

Η f είναι συνεχής στο $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$ και $f'(x) < 0$ στο $\left(\frac{3\pi}{4}, \pi\right)$ άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[\frac{3\pi}{4}, \pi\right]$

Η f έχει θέσεις για τοπικά μέγιστα στο $x = -1$ και $x = \frac{3\pi}{4}$ και θέσεις για τοπικά ελάχιστο στο $x=0$ και $x=\pi$

$$\text{Είναι } f(-1) = \sqrt[3]{(-1)^4} = \sqrt[3]{1} = 1,$$

$$f(0) = e^0 \eta \mu 0 = 0,$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = e^{\frac{3\pi}{4}} \eta \mu \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}$$

$$\text{Και } f(\pi) = e^{\pi} \eta \mu \pi = 0$$

$$\text{Επειδή } f(0)=f(\pi)=0 \text{ έχω ολικό ελάχιστο το } 0 \text{ και } f(-1) < f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \text{ αφού } 1 < \frac{\sqrt{2} e^{\frac{3\pi}{4}}}{2}$$

$$\text{άρα η } f \text{ έχει ολικό μέγιστο το } \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}$$

$$\text{Επομένως } f([-1, \pi]) = \left[0, \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}}\right]$$

Δ3.

$$\text{Το ζητούμενο είναι } E(\Omega) = \int_0^{\pi} |f(x) - g(x)| dx = \int_0^{\pi} |e^x \eta \mu x - e^{5x}| dx$$

Αν $h(x) = e^x \eta \mu x - e^{5x} = e^x (\eta \mu x - e^{4x}) = e^x \phi(x)$, με $\phi(x) = \eta \mu x - e^{4x}$ $x \in [0, \pi]$ η οποία είναι συνεχής ως πράξη και σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Η ϕ είναι παραγωγίσιμη στο $[0, \pi]$ ως πράξη και σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων με $\phi'(x) = \sigma \nu x - 4e^{4x}$, $\phi''(x) = \eta \mu x - 16e^{4x} < 0$, $x \in [0, \pi]$

Άρα η ϕ' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$

$$\text{Με } 0 \leq x \leq \pi \xrightarrow{\phi'} \phi'(x) \leq \phi'(0) = -3 < 0,$$

άρα η φ γνησίως φθίνουσα στο $[0, \pi]$

$$\text{Έχω } 0 \leq x \leq \pi \xrightarrow{\phi} \phi(x) \leq \phi(0) = -1 < 0$$

Επομένως $h(x) < 0 \quad x \in [0, \pi]$

Άρα $E(\Omega) =$

$$\int_0^\pi [-h(x)] dx = \int_0^\pi e^x (e^{4x} - \eta \mu x) dx = \int_0^\pi (e^{5x} - e^x \eta \mu x) dx = \int_0^\pi e^{5x} dx - \int_0^\pi e^{5x} \eta \mu x dx = I - J$$

$$\text{Με } I = \int_0^\pi e^{5x} dx = \left[\frac{e^{5x}}{5} \right]_0^\pi = \frac{e^{5\pi} - 1}{5}$$

και $J =$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi e^x \eta \mu x dx &= [e^x \eta \mu x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x \sigma \upsilon \nu x dx = e^\pi \eta \mu \pi - e^0 \eta \mu 0 - \left\{ [e^x \sigma \upsilon \nu x]_0^\pi - \int_0^\pi e^x (-\eta \mu x) dx \right\} \\ &= - \left\{ e^\pi \sigma \upsilon \nu \pi - e^0 \sigma \upsilon \nu 0 + \int_0^\pi e^x \eta \mu x dx \right\} = -e^\pi (-1) + 1 - J = e^\pi + 1 - J \end{aligned}$$

$$\text{Άρα } J = e^\pi + 1 - J \Leftrightarrow J = \frac{e^\pi + 1}{2}$$

$$\text{Επομένως } E(\Omega) = I - J = \frac{2e^{5\pi} - 5e^\pi - 7}{10} \text{ τ.μ}$$

Δ4

$$16e^{-\frac{3\pi}{4}} f(x) - e^{-\frac{3\pi}{4}} (4x - 3\pi)^2 = 8\sqrt{2} \Leftrightarrow f(x) - \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{\frac{3\pi}{4}} \Leftrightarrow$$

$$f(x) - \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} = f\left(\frac{3\pi}{4}\right) \quad (1)$$

$$\text{Για } x = \frac{3\pi}{4}, \text{ έχω}$$

$$f\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{(4 \cdot \frac{3\pi}{4} - 3\pi)^2}{16} = f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$\Delta η λ α δ ή \quad f\left(\frac{3\pi}{4}\right) = f\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$Έχω \quad (1) \Leftrightarrow f(x) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} = 0$$

$$Από \Delta 2 \quad έχω \quad f(x) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) < 0, \quad x \in [-1, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi] \quad και$$

$$- \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} < 0, \quad x \in [-1, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi]$$

$$άρα \quad f(x) - f\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{(4x - 3\pi)^2}{16} < 0, \quad x \in [-1, \frac{3\pi}{4}) \cup (\frac{3\pi}{4}, \pi]$$

$$Επομένως \quad η \quad x = \frac{3\pi}{4} \quad είναι \quad μοναδική \quad ρίζα \quad της \quad εξίσωσης$$