ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2018

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη Σχολικό βιβλίο σελ. 99

Α2. α) Ψευδής

β) Η συνάρτηση $g(x)=\begin{cases} x, & x\le 0 \\ \dfrac{1}{x}, & x>0 \end{cases}$

είναι 1-1 όμως δεν είναι γνησίως μονότονη (σχήμα από σχολικό βιβλίο) σελ. 35

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 216

Α4. α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Σωστό

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f(x)=x-\dfrac{4}{x^2},\ x\in R-\{0\}$

Η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα $A_1=(-\infty,0), A_2=(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=1+\frac{8x}{x^4}=\frac{x^4+8x}{x^4}=\frac{(x^3+8)}{x^3}=\frac{x^3+8}{x^3},\ x\neq 0$$

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow x^3+8=0 \Leftrightarrow x^3=-8 \Leftrightarrow x=-2$$

x	$-\infty$ -2	-2 0	0 $+\infty$
x^3	-	-	+
x^3+8	-	+	+
f΄(x)	+	-	+
f(x)	↗	↘	↗

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο (-∞, -2], γνησίως φθίνουσα στο [-2,0) και γνησίως αύξουσα στο (0, +∞). Η f στο x_0=-2 έχει τοπικό μέγιστο το f(-2)=-3

Β2. Η f΄ είναι παραγωγίσιμη σε κάθε ένα από τα διαστήματα A_1= $(-\infty,0)$ και $A_2=(0,+\infty)$

$$f''(x)=\frac{3x^2\cdot x^3-3x2(x^3+8)}{x^6}=\frac{3x^5-3x^5-24x^2}{x^6}=\frac{-24x^2}{x^6}=\frac{-24}{x^4}<0 \text{ για κάθε } x\neq 0$$

f κοίλη στο $(-\infty,0)$ και στο $(0,+\infty)$και δεν έχει σημεία καμπής.

Β3. Κατακόρυφες: $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x_2}=+\infty$

άρα η x=0, δηλαδή ο άξονας y΄y είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της f

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\left(x-\frac{4}{x^2}\right)=-\infty$ Αφού $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{x^2}=+\infty$

Οριζόντιες πλάγιες στο $+\infty$ και στο $-\infty$.

Για να είναι η $y=\lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$ (αντιστοίχως στο $-\infty$) πρέπει τα όρια $\lambda=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ και $\beta=\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)$ να είναι πραγματικοί αριθμοί.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3-4}{x^2}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3-4}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$. Οπότε λ=1

Άρα: $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-\lambda x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0$, οπότε β=0

Άρα η y=x πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-4}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-\frac{4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(-\frac{4}{x^2}\right)=0\,,$$

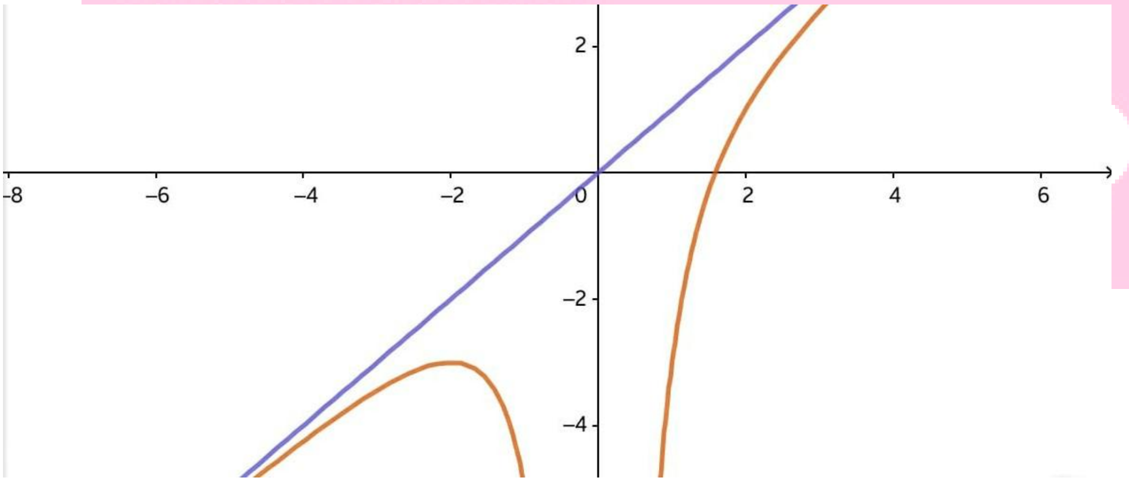
άρα η y=x πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$

B4.

x	$-\infty$	-2		0	
f''(x)	-		-	‖	-
f'(x)	+	0	-	‖	+
f(x)	$-\infty$ ↗		↘	‖	↗ $+\infty$

$$f(x)=0\Leftrightarrow\frac{x^3-4}{x^2}=0\Leftrightarrow x^3-4=0\Leftrightarrow x=\sqrt[3]{4}$$

Πλάγια ασύμπτωτη η y=x κατακόρυφη ασύμπτωτη η x=0



ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Επειδή το x παριστάνει μήκος πρέπει να είναι $x>0$ αλλά και $x<8$ που είναι το μήκος συνολικά του σύρματος.

Άρα 0$<x<8$.

Αν x είναι η περίμετρος του τετραγώνου, $8-x$ θα είναι το μήκος του κύκλου.

L κύκλου =2 πρ οπότε 2πρ=8-x $\Leftrightarrow$ ρ=$\dfrac{8-x}{2\pi}$

Ε κύκλου =πρ^2=$\pi\dfrac{(8-x)^2}{4\pi^2}=\dfrac{(8-x)^2}{4\pi}$

Π τετραγώνου =4α άρα 4α=x$\Leftrightarrow a=\dfrac{x}{4}$

Ετ =α^2=$\dfrac{x^2}{16}$

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι

$$E(x)=\frac{(8-x)^2}{4\pi}+\frac{x^2}{16}=\frac{4(8-x)^2+\pi x^2}{16\pi}=\frac{4(64-16x+x^2)+\pi x^2}{16\pi}=$$

$$=\frac{\pi x^2+4x^2-64x+256}{16\pi}=\frac{x^2(\pi+4)-64x+256}{16\pi}$$ με $x\in(0,8)$

Γ2. $\mathrm{E}(x)=\dfrac{(\pi+4)x^2-64x+256}{16\pi},x\in(0,8)$

Η Ε είναι παραγωγίσιμη στο (0,8) με

$$\mathrm{E}'(x)=\frac{2(\pi+4)x-64}{16\pi}=\frac{2[(\pi+4)x-32]}{16\pi}=\frac{(\pi+4)x-32}{8\pi}$$

$$\mathrm{E}'(x)=0\Leftrightarrow\frac{(\pi+4)x-32}{8\pi}=0\Leftrightarrow(\pi+4)x=32\Leftrightarrow\quad x=\frac{32}{\pi+4}$$

x	0		$\frac{32}{\pi+4}$		8
Ε΄(x)		-	0	+	
Ε(x)		$\searrow$	Ο.Ε	$\nearrow$	

Ε γνησίως φθίνουσα στο $(0,\dfrac{32}{\pi+4}]$ και Ε συνεχής στο $(0,\dfrac{32}{\pi+4}]$ γιατί Ε΄(x)<0 στο $(0,\dfrac{32}{\pi+4}]$

E γνησίως αύξουσα στο $[\frac{32}{\pi+4},8)$ και E συνεχής στο $(\frac{32}{\pi+4},8]$ γιατί E΄(x)>0 στο $(\frac{32}{\pi+4},8]$

Η E στο $x_0=\frac{32}{\pi+4}$ παρουσιάζει (ολικό) ελάχιστο

$$\delta=\frac{2(8-x)}{2\pi}=\frac{8-x}{\pi} \text{ και } \alpha=\frac{x}{4}$$

Άρα $\frac{x}{4}=\frac{8-x}{\pi}\Leftrightarrow x\pi=4(8-x)\Leftrightarrow x\pi+4x=32\Leftrightarrow x(\pi+4)=32\Leftrightarrow x=\frac{32}{\pi+4}$ που ισχύει.

Γ3.

Ζητούμε μοναδικό $x_0\in(0,8)$ ώστε $E(x_0)=5$.

Βρίσκουμε σύνολο τιμών για την E.

Η E συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$ άρα

$$\mathrm{E}\left(\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]\right)=\left[\mathrm{E}\left(\frac{32}{\pi+4}\right),\lim_{x\to0^+}E(x)\right)=\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$$

με $E\left(\frac{32}{\pi+4}\right)=\frac{16}{\pi+4}$ και $\lim\limits_{x\to0^+}E(x)=\frac{256}{16\pi}=\frac{16}{\pi}$

Η E συνεχής και γνησίως αύξουσα στο $\left(\frac{32}{\pi+4},8\right)$ άρα

$$\mathrm{E}\left(\left(\frac{32}{\pi+4},8\right)\right)=\left(\lim_{x\to\frac{32}{\pi+4}}\mathrm{E}(x),\lim_{x\to8^-}E(x)\right)=\left(\frac{16}{\pi+4},4\right)$$

Επειδή $5\in\left[\frac{16}{\pi+4},\frac{16}{\pi}\right)$ και E γνησίως φθίνουσα στο $\left(0,\frac{32}{4\pi}\right]$, άρα υπάρχει μοναδικό $x_0\in\left(0,\frac{32}{\pi+4}\right]$ ώστε $E(x_0)=5$.

Επειδή $5\notin\left(\frac{16}{\pi+4},4\right)$ άρα δεν υπάρχει $x_1\in\left[\frac{32}{\pi+4},8\right]$ ώστε $E(x_2)=5$

οπότε η ρίζα x_0 είναι μοναδική

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο R με

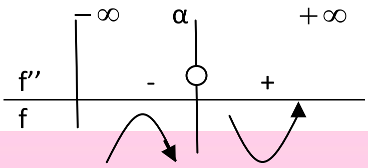
$$f'(x)=2e^{x-a}-2x$$

$$f''(x)=2e^{x-a}-2=2\left(e^{x-a}-1\right)$$

Για κάθε $x\in R$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow 2e^{x-a}-2=0\Leftrightarrow e^{x-a}=1\Leftrightarrow e^{x-a}=e^{0}\Leftrightarrow x-a=0\Leftrightarrow x=a$$

Είναι $e^{x-a}-1>0\Leftrightarrow e^{x-a}>1\Leftrightarrow e^{x-a}>e^{0}\overset{e^{x}\uparrow}{\Leftrightarrow}x-a>0\Leftrightarrow x>a$



$f''(x)<0$ στο $(-\infty,a)$ άρα η f κοίλη στο $(-\infty,\ a]$

$f''(x)>0$ στο $(a,+\infty)$ άρα η f κυρτή στο $[a,\ +\infty)$

Αφού $f''(a)=0$

Και η f'' αλλάζει πρόσημο εκατέρωθεν του σημείου μηδενισμού, τότε έχουμε σημείο καμπής το $(a,\ f(a))$ δηλ. το $(a,\ 2-a^{2})$ αφού επιπλέον ορίζεται η εξίσωση εφαπτομένης στο σημείο $(a,\ f(a))$

Δ2.

Για x<α είναι $f''(x)<0$

Και $f'(x)$ συνεχής στο $(-\infty,a]$, επομένως είναι $f'(x)$ γν. φθίνουσα στο $(-\infty,a]$.

$$f'(a)=2e^{0}-2a=2-2a=2(1-a)<0$$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(2e^{x-a}-2x\right)=0-(-\infty)=+\infty$$

Άρα σύνολο τιμών της f' στο $A_1=(-\infty,a]$ είναι το $f'(A_1)=\left[f'(a),\lim_{x\to-\infty}f'(x)\right)=$ $[2(1-a),+\infty)$.

Το 0 ανήκει στο f′(A$_1$) και αφού η f′ είναι γν. φθίνουσα, θα έχει μοναδική ρίζα $x_1 \in (-\infty, a)$.

Για x>α είναι $f''(x) > 0$ και $f'(x)$ συνεχής στο $[a, +\infty)$

Επομένως είναι $f'(x)$ γν. αύξουσα στο $[a, +\infty)$

Άρα με $A_2 = (a, +\infty)$, $f'(A_2) = \left(f'(a), \lim\limits_{x \to +\infty} f'(x)\right)$

Όπου $f'(a) = 2(1-a) < 0$

Και $\lim\limits_{x \to +\infty} f'(x) = \lim\limits_{x \to +\infty}\left(2e^{x-a} - 2x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2\left(\dfrac{e^x}{e^a} - x\right) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x\left(\dfrac{e^x}{x \cdot e^a} - 1\right) = +\infty$

Αφού $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^a x} \underset{DLH}{\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^a} = +\infty$

Άρα $f'(A_2) = (2(1-a), +\infty)$

Το 0 ανήκει στο $f'(A_2)$, επομένως η $f'(x)$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο A_2 η οποία είναι μοναδική, αφού η $f'(x)$ είναι γν. αύξουσα στο A_2.

Για $x < x_1$

f' γνησίως φθίνουσα άρα $f'(x) > f'(x_1)$ οπότε $f'(x) > 0$

Για $x_1 < x < a$

f' γνησίως φθίνουσα άρα $f'(x) < f'(x_1)$ οπότε $f'(x) < 0$

Για $a < x < x_2$

f' γνησίως αύξουσα άρα $f'(x) < f'(x_2)$ οπότε $f'(x) < 0$

Για $x > x_2$

f' γνησίως αύξουσα άρα $f'(x) > f'(x_2)$ οπότε $f'(x) > 0$

Είναι $f'(x) > 0$ στο $(-\infty, x_1)$ και f συνεχής στο $(-\infty, x_1]$

Άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $(-\infty, x_1]$ (1)

Αντίστοιχα,

Είναι $f'(x) < 0$ στο (x_1, x_2) και f συνεχής στο $[x_1, x_2]$

Άρα η f είναι γν. φθίνουσα στο $[x_1, x_2]$ (2)

Είναι $f'(x)>0$ στο $(x_2,+\infty)$ και f συνεχής στο $[x_2,+\infty)$

άρα η f είναι γν. αύξουσα στο $[x_2,+\infty)$ (3)

Επομένως

Από (1), (2), για $x=x_1$ η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο

Από (2), (3) για $x=x_2$ η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο

Έτσι δημιουργείται ο παρακάτω πίνακας

x	$-\infty$		x_1		α		x_2		$+\infty$
f΄΄(x)		-		-		+		+	
f΄ (x)		+ ↘		- ↘		- ↗		+ ↗	
f(x)		↗	T.M	↘		↘	T.E.	↗	

Δ3. Είναι f΄(1)=2e$^{1-\alpha}$-2<0 και γνωρίζουμε ότι για x<x_1 f΄(x)>0 άρα $1 \notin (-\infty, x_1)$

Δηλαδή είναι x_1<1<a<x_2 και η f γνησίως φθίνουσα στο [x_1,x_2] επομένως είναι και “1-1”

Άρα με 1<α<x_2

H f(x)=f(1) έχει μοναδική λύση το x=1

Άρα στο (α, x_2) η f(x)=f(1) είναι αδύνατη.

Δ4.

Αν α=2, $f(x)=2e^{x-2}-x^2$, $x\in R$

Εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $M(2, f(2))$

$$f(2)=2e^{2-2}-4=2e^0-4=-2$$

$$f'(2)=2e^{2-2}-2\cdot 2=2e^0-4=-2$$

επομένως

$$y-f(2)=f'(2)=f'(2)(x-2)$$

$y-(-2)=-2(x-2)$

$y+2=-2x+4 \Leftrightarrow y=-2x+2$

Η εφαπτόμενη της C_f βρίσκεται πάνω από την εξίσωση εφαπτομένης, με εξαίρεση το σημείο επαφής, αφού η f είναι κυρτή για x>2.

Άρα $f(x)>2-2x$

Επειδή $\sqrt{x-2}>0$ προκύπτει

$f(x)\sqrt{x-2}>(2-2x)\sqrt{x-2}$

Έχουμε συνεχείς συναρτήσεις

Άρα $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>\int_2^3(2-2x)\sqrt{x-2}dx$

Με $\sqrt{x-2}=\omega$, $\frac{1}{2\sqrt{x-2}}dx=d\omega \Leftrightarrow dx=2\omega d\omega$

και $x-2=\omega^2 \Leftrightarrow x=\omega^2+2$ και για x=2 ω=0

x=3 ω=1

Άρα $\int_2^3(2-2x)\sqrt{x-2}dx=\int_0^1\left[2-2\left(\omega^2+2\right)\right]\omega\cdot 2\omega d\omega=\int_0^1\left(2-2\omega^2-4\right)2\omega^2 d\omega$

$=\int_0^1\left(-2-2\omega^2 2\omega^2\right)d\omega=\int_0^1\left(-4\omega^2-4\omega^4\right)d\omega=\left[-\frac{4\omega^3}{3}-\frac{4\omega^5}{5}\right]_0^1=$

$=-\frac{4}{3}-\frac{4}{5}=-\frac{20}{15}-\frac{12}{15}=-\frac{32}{15}$

Επομένως $\int_2^3 f(x)\sqrt{x-2}dx>\int_2^3(2-2x)\sqrt{x-2}dx=-\frac{32}{15}$