

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2007
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A.1 Απόδειξη σελ. 98.

A.2 Ορισμός σελ. 141

A.3 Ορισμός σελ. 280

B. α) Λ, β) Λ, γ) Λ, δ) Σ, ε) Σ

ΘΕΜΑ 2^ο

$$z = \frac{2+ai}{a+2i} \quad a \in \mathbb{R}$$

α) $|z| = \frac{\sqrt{4+a^2}}{\sqrt{4+a^2}} = 1$

β) $z_1 = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = \frac{-i^2}{i} = -i$

$z_2 = \frac{2+2i}{2+2i} = 1$

i) $|z_1 - z_2| = |-i - 1| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

ii) $(z_1)^{2\nu} = (-i)^{2\nu} = (-1)^\nu (-z_2)^\nu = (-1)^\nu$

ΘΕΜΑ 3^ο

α) $f(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta$

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x+1)$

$f''(x) = 6x$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'	+	○	○	+
f	↗	↘	↗	
		T.M.	T.E.	

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f''	-	○	+
f	↘	↗	
		Σ.Κ.	

Άρα στο $x_1 = -1$ η f
 μέγιστο
 Στο $x_2 = 1$ η f

παρουσιάζει τοπικό
 παρουσιάζει τοπικό

ελάχιστο

Στο $x_3=0$ η f παρουσιάζει σημείο καμπής

β) Στο $A1 = (-\infty, -1)$

$$f(A1) = \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(-1) \right] = (-\infty, 2\sigma\nu^2\theta] \quad 0 \in f(A1)$$

$$\text{Στο } A_2 \in (-1, 1) \quad f(A2) = \left(\lim_{x \rightarrow 1} f(x), \lim_{x \rightarrow -1} f(x) \right) = (-2 - 2\eta\mu^2\theta, 2\sigma\nu^2\theta) \quad 0 \in f(A2)$$

Στο $A3 \in [1, +\infty)$

$$f(A3) = (-2 - 2\eta\mu^2\theta, +\infty) \quad 0 \in f(A3)$$

Αφού σε κάθε διάστημα η f είναι γνησίως μονότονη οι ρίζες σ' αυτά είναι μοναδικές. Άρα συνολικά η $f(x) = 0$ έχει ακριβώς τρεις ρίζες.

γ) $f(-1) = +2 - 2\eta\mu^2\theta = 2\sigma\nu^2\theta$:

$$f(1) = -2 - 2\eta\mu^2\theta$$

$$f(0) = -2\eta\mu^2\theta$$

$$A(-1, f(-1)) = A(-1, 2\sigma\nu^2\theta)$$

$$B(1, f(1)) = B(1, -2 - 2\eta\mu^2\theta)$$

$$\Gamma(0, f(0)) = \Gamma(0, -2\eta\mu^2\theta)$$

$$y_A = -2x_A - 2\eta\mu^2\theta$$

$$2\sigma\nu^2\theta = 2 - 2\eta\mu^2\theta \quad \text{δεκτό}$$

$$y_B = -2y_B - 2\eta\mu^2\theta$$

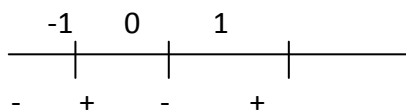
$$-2 - 2\eta\mu^2\theta = -2 - 2\eta\mu^2\theta \quad \text{δεκτό}$$

$$y_\Gamma = -2x_\Gamma - 2\eta\mu^2\theta$$

$$-2\eta\mu^2\theta = -2\eta\mu^2\theta \quad \text{δεκτό}$$

$$\delta) \quad f(x) - g(x) = x^3 - 3x - 2\eta\mu^2\theta + 2x + 2\eta\mu^2\theta = x^3 - x = x \cdot (x-1)(x+1)$$

Ρίζες: $x=0$, $x=1$, $x=-1$



$$E = \int_{-1}^0 (x^3 - x) \cdot dx - \int_0^1 (x^3 - x) \cdot dx$$

$$= \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 - \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \right] = -\frac{2}{4} + 1 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad T.M$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α. $F(x) = \int_0^x f(t) \cdot g(t) dt$

$F'(x) = f(x) \cdot g(x)$

f γνησίως αύξουσα στο $[0,1]$ άρα $x \geq 0$ τότε:

$f(x) \geq f(0) > 0$ και $g(x) > 0$ δηλαδή $f(x) \cdot g(x) > 0$

και $f'(x) > 0$ δηλαδή F γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$, $F(0)=0$. αν $x > 0$ τότε: $F(x) > F(0)$

$\Leftrightarrow F(x) > 0$

β. Έστω: $f(x)G(x) > F(x) \Leftrightarrow f(x)G(x) - F(x) > 0$

$\Leftrightarrow f(x) \cdot \int_0^x g(t) dt - \int_0^x f(t)g(t) dt > 0$

$\Leftrightarrow \int_0^x f(x) \cdot g(t) dt - \int_0^x f(t)g(t) dt > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \int_0^x (f(x) - f(t))g(t) dt > 0$

Αρκεί ν.δ.ο. $(f(x) - f(t)) \cdot g(t) > 0$ όταν $t \in [0, x]$

η f αύξουσα στο $[0, x]$ άρα $x > t$ τότε: $f(x) > f(t) \Leftrightarrow f(x) - f(t) > 0$ και $g(t) > 0$ άρα: $(f(x) - f(t))g(t) > 0$

και $\int_0^x (f(x) - f(t))g(t) dt > 0$

γ. Έστω $h(x) = \frac{F(x)}{G(x)}$

$h'(x) = \frac{F'(x)G(x) - F(x)G'(x)}{G^2(x)} = \frac{g(x) \cdot (f(x)G(x) - F(x))}{G^2(x)} > 0$

γιατί: $g(x) > 0$

$f(x) \cdot G(x) - F(x) > 0$ από το ερώτημα (β) και $G^{(2)}(x) > 0$ στο $(0,1]$

Άρα η γνησίως αύξουσα στο $(0,1]$ και $x \leq 1$ τότε: $h(x) \leq h(1) \Leftrightarrow \frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$

δ.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(t)g(t)dt}{\int_0^x g(t)dt} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt}{(x^5)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\int_0^x f(t)g(t)dt)'}{(\int_0^x g(t)dt)'} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(\int_0^{x^2} \eta \mu t^2 dt)'}{(x^5)'} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) \cdot g(x)}{g(x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \eta \mu x^4}{5x^4}$$

$= f(0) \cdot \frac{2}{5} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\eta \mu x^4}{x^4} \cdot \lim_{x \rightarrow 0^+} x = f(0) \cdot \frac{2}{5} \cdot 1 \cdot 0 = 0$

$(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = f(0))$ γιατί f συνεχής στο 0).