ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2002
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. **α**. Απόλυτη συχνότητα v_i που αντιστοιχεί στην τιμή x_i είναι ο φυσικός αριθμός που δείχνει πόσες φορές εμφανίζεται η τιμή x_i της εξεταζόμενης μεταβλητής x στο σύνολο των παρατηρήσεων.

β. Σχετική συχνότητα f_i της τιμής x_i είναι το αποτέλεσμα της διαίρεσης της συχνότητας v_i με το μέγεθος v του δείγματος. Δηλ. $f_i = \frac{v_i}{v}$ $\quad i = 1,2,.....,\kappa$

γ. **i**. Αφού $0 \le v_i \le v$ άρα $\frac{0}{v} \le \frac{v_i}{v} \le \frac{v}{v}$ δηλ. $0 \le f_i \le 1$ για $i = 1,2,.....,k$

ii. $f_i + f_2 + ...+ f_k = \frac{v_1}{v} + \frac{v_2}{v} + ...+ \frac{v_k}{v} = \frac{v_1 + v_2 + ...+ v_k}{v} = \frac{v}{v} = 1$

Β.1. Θεωρία βιβλίου σελ. 150 (1^{ος} κανόνας λογ. Πιθανοτήτων)

Β.2. **α**. Θεωρία βιβλίου σελ. 148-149.

«Γενικά σε ένα πείραμα .... $P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)}$ »

β. **i**. P(Ω)=1

ii. P(∅)=0

ΘΕΜΑ 2^{ο}

$$f(x) = \frac{2x}{x+1}$$

α. Πρέπει $x + 1 \ne 0 \Leftrightarrow x \ne -1$ Άρα για το πεδίο ορισμού έχω A=R-{-1}

β. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = \lim\limits_{x \to 3} \frac{2x}{x+1} = \frac{2 \cdot 3}{3+1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

γ. $f'(x) = \frac{2(x+1) - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x+1)^2}$

δ. Εστω $\varepsilon : y = \lambda x + \beta$

Πρέπει $\lambda = 2 \Leftrightarrow f'(x) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{2}{(x+1)^2} = 2 \Leftrightarrow 2(x+1)^2 = 2 \Leftrightarrow (x+1)^2 = 1 \Leftrightarrow$

$x+1 = 1$ ή $x+1 = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = 0$ ή $x = -2$

Αρα $A(0, f(0))$ και $B(-2, f(-2))$ τα σημεία επαφής.

$f(0) = 0$ και $f(-2) = 4$ δηλ. $A(0,0)$ και $B(-2,4)$ που επαληθεύουν τις εξισώσεις των εφαπτομένων.

Εξίσωση εφαπτομένης στο Α $0 = 2.0 + \beta \Leftrightarrow \beta = 0$
Αρα $\varepsilon_1 : y = 2x$

Εξίσωση εφαπτομένης στο Β $4 = 2(-2) + \beta \Leftrightarrow \beta = 8$
Αρα $\varepsilon_2 : y = 2x + 8$

ΘΕΜΑ 3^Ο^

Τοποθετώ σε αύξουσα σειρά τις παρατηρήσεις.
8, 9, 10, 13, 13, 14, 14, 15, 16, 18

α. $\bar{x} = \dfrac{8+9+10+13+13+14+14+15+16+18}{10} = \dfrac{130}{10} = 13 ευρώ$

$\delta = \dfrac{13+14}{2} = 13{,}5 ευρώ$

Έχω δύο επικρατούσες τιμές $M_0 = 13 ευρώ$ και $M_0 = 14 ευρώ$

β. R=18-8=10ευρώ

$$S^2 = \frac{(8-13)^2 + (9-13)^2 + (10-13)^2 + (13-13)^2 + (13-13)^2 + (14-13)^2 + (14-13)^2 + (15-13)^2 +}{10}$$

$$\frac{+(16-13)^2 + (18-13)^2}{10} =$$

$$= \frac{(-5)^2 + (-4)^2 + (-3)^2 + 0^2 + 0^2 + 1^2 + 1^2 + 2^2 + 3^2 + 5^2}{10} =$$

$$= \frac{25+16+9+0+0+1+1+4+9+25}{10} = \frac{90}{10} = 9(ευρώ)^2$$

Αρα $S=\sqrt{9}=3ευρώ$ $CV=\frac{S}{\bar{x}}=\frac{3}{13}=0,23$

γ. Είναι $y_i=0,9x_i$ $i=1,2,.....,10$

Αρα $\bar{y}=0,9\bar{x}$ και $S_y=0,9S$

Αρα $CV_y=\frac{S_y}{\bar{y}}=\frac{0,9S_x}{0,9\bar{x}}=CV$

Δεν μεταβάλλεται ο συντελεστής μεταβολής.

ΘΕΜΑ 4^{o}

α. Ισχύει :

$$P(A)+P(B)\neq 2P(A\cap B)\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)\neq 2P(A\cap B)-P(A\cap B)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P(A\cup B)\neq P(A\cap B)$$

β. $f'(x)=3(x-P(A\cup B))^2-3(x-P(A\cap B))^2=$

$=3(x-P(A\cup B)+x-P(A\cap B))(x-P(A\cup B)-x+P(A\cap B))=$

$=3.(P(A\cap B)-P(A\cup B).(2x-P(A\cup B)-P(A\cap B))$ (1)

Είναι $f'(x)=0\Leftrightarrow 2x-P(A\cup B)-P(A\cap B)=0$

(αφού λόγω α, $P(A\cap B)-P(A\cup B)\neq 0$)

$$\Leftrightarrow x=\frac{P(A\cup B)+P(A\cap B)}{2}\Leftrightarrow x=\frac{P(A)+P(B)-P(A\cap B)+P(A\cap B)}{2}\Leftrightarrow x=\frac{P(A)+P(B)}{2}$$

x	$-\infty$	$\frac{P(A)+P(B)}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	↗		↘

Παρατηρώ στην (1) ότι $f'(x)$ πρωτοβάθμια με συντελεστή του x αρνητικό αφού $P(A\cap B)-P(A\cup B)\prec 0$ ($A\cap B\subseteq A\cup B$)

Άρα f(x) εμφανίζεται μέγιστο στο $x=\frac{P(A)+P(B)}{2}$

γ. Α, Β ασυμβίβαστα άρα $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$ και $P(A\cap B)=0$

Εχω λοιπόν:

$$f(P(A)) = (P(A) - P(A \cup B))^3 - (P(A) - P(A \cap B))^3 = (P(A) - P(A) - P(B))^3 - (P(A))^3 =$$

$$= -(P(B))^3 - (P(A))^3 \quad (2)$$

Ακόμα:

$$f(P(B)) = (P(B) - P(A \cup B))^3 - (P(B) - P(A \cap B))^3 = (P(B) - P(A) - P(B))^3 = -(P(A))^3 - (P(B))^3$$
(3)

Από (2) και (3) έχω $f(P(A)) = f(P(B))$