

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2006
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. Θεωρία βιβλίου σελ. 30

B. α. θεωρία βιβλίου σελ. 142.
β. θεωρία βιβλίου σελ. 16

Γ. α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος

ΘΕΜΑ 2^ο

α. Είναι $\sum_{i=1}^5 v_i = v \Leftrightarrow \alpha + 4 + 5\alpha + 8 + 4\alpha + \alpha - 1 + 2\alpha = 50 \Leftrightarrow 13\alpha = 39 \Leftrightarrow \alpha = 3$

β. Ο πίνακας διαμορφώνεται όπως παρακάτω.

x_i	v_i	N_i
0	7	7
1	23	30
2	12	42
3	2	44
4	6	50
Σύνολο	50	

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^5 x_i v_i}{v} = \frac{0 \cdot 7 + 1 \cdot 23 + 2 \cdot 12 + 3 \cdot 2 + 4 \cdot 6}{50} = \frac{77}{50} = 1,54 \text{ βιβλία.}$$

γ. Από τη στήλη των αθρ. Συχνοτήτων N_i διαπιστώνω ότι η 25^{η} και 26^{η} σε διάταξη παρατηρήσεις είναι ίσες με 1.

$$\text{Άρα } \delta = \frac{1+1}{2} = 1 \text{ βιβλίο.}$$

δ. Έστω A το ενδεχόμενο να έχει διαβάσει τουλάχιστον 3 βιβλία.

$$\text{Τότε } P(A) = \frac{N(A)}{N(\Omega)} = \frac{8}{50} = 0,16.$$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Έστω A το ενδεχόμενο να επιλεγεί αγόρι. Τότε $P(A) = \frac{x}{x+(x+4)^2}$. Άρα

$$f(x) = \frac{x}{x+(x+4)^2} \text{ η ζητούμενη συνάρτηση.}$$

β. Είναι $\frac{x}{x+(x+4)^2} = \frac{1}{19}$ (1) και $x+(x+4)^2 < 100$ (2)

$$(1) \Leftrightarrow 19x = x + (x+4)^2 \Leftrightarrow 19x = x + x^2 + 8x + 16 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \quad \text{ή} \\ x = 8 \text{ απορ. γιατί τότε δεν ισχύει η (2).}$$

Άρα $x=2$.

Οπότε $2 + (2+4)^2 = 2 + 6^2 = 38$ μέλη ο χορευτικός όμιλος.

Αν K το ενδεχόμενο να επιλεγεί κορίτσι, είναι:

$$P(K) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{19} = \frac{18}{19}.$$

γ. Μελετώ τη συνάρτηση $f(x)$ θεωρώντας την πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής

$$f'(x) = \frac{x + (x+4)^2 - x[1 + 2(x+4)]}{[x + (x+4)^2]^2} = \frac{x + x^2 + 8x + 16 - x - 2x^2 - 8x}{[x + (x+4)^2]^2} = \frac{-x^2 + 16}{[x + (x+4)^2]^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow -x^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow x = 4 \text{ ή } x = -4$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow -4 < x < 4$$

x	$-\infty$	-4	4	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	↘		↗		↘

Παρουσιάζει μέγιστο στο $x=4$.

$$\text{Οπότε } f(4) = \frac{4}{4+(4+4)^2} = \frac{4}{68} = \frac{1}{17} \text{ οπότε μέγιστη τιμή της } P(A) = \frac{1}{17}.$$

(Βέβαια, $D_f = \mathbb{N}$ αλλά για να πραγματοποιηθεί η μελέτη της συνάρτησης πρέπει να θεωρηθεί ως πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής)

ΘΕΜΑ 4^ο

$$f(x) = -2x^2 + \kappa x + 4\sqrt{x} + 10, \quad x \geq 0$$

α. $D_f = [0, +\infty)$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -4x + \kappa + \frac{4}{2\sqrt{x}} \\ &= -4x + \kappa + \frac{2}{\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Για να είναι παράλληλη στο x' πρέπει $\lambda = 0$

δηλ. $f'(1) = 0 \Leftrightarrow$

$$-4 \cdot 1 + \kappa + \frac{2}{\sqrt{1}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-4 + \kappa + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\kappa = 2$$

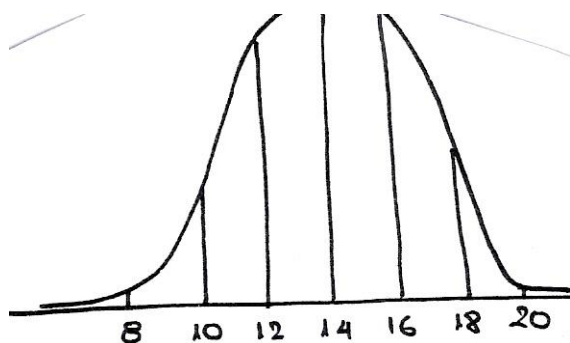
Έστω $y - y_0 = \lambda(x - x_0)$ (1) η εξίσωση της εφαπτομένης όπου

$$x_0 = 1, \lambda = 0, y_0 = f(1) = -2 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + 4\sqrt{1} + 10 = -2 + 2 + 4 + 10 = 14$$

Άρα (1) $\Leftrightarrow y - 14 = 0$ η ζητούμενη ευθεία.

β. $\bar{x} = 14$

$$S = -\frac{2f'(4)}{13} = -\frac{2 \cdot \left(-4 \cdot 4 + 2 + \frac{2}{\sqrt{4}}\right)}{13} = 2$$



Είναι 68% των παρατηρήσεων στο διάστημα (12,16)

Είναι 95% των παρατηρήσεων στο διάστημα (10, 18)

Είναι 99,7% των παρατηρήσεων στο διάστημα (8, 20)

Αφού 99,7% των παρατηρήσεων στο (8, 20) άρα μικρότερες ή ίσες του 8 έχουμε
 $\frac{100 - 99,7}{2} = 0,15\%$ των παρατηρήσεων.

$$\text{Άρα } \frac{3}{v} = 0,0015 \Leftrightarrow v = \frac{3}{0,0015}$$

$\Leftrightarrow v = 2000$ παρατηρήσεις

(i) Στο διάστημα (10, 14) έχω 47,5% των παρατηρήσεων

Στο διάστημα (14, 16) έχω 34% των παρατηρήσεων

Άρα στο διάστημα (10, 16) έχω 81,5% των παρατηρήσεων

Δηλ. $2000 \cdot 0,815 = 1630$ παρατηρήσεις

$$(ii) CV = \frac{S}{x} = \frac{2}{14} \approx 0,143 > 0,1$$

Άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές

Έστω ότι προσθέτουμε $a > 0$ σε κάθε παρατήρηση.

Αν $y_1, y_2, \dots, y_{2000}$ οι νέες παρατηρήσεις τότε $y_i = x_i + a$, $i = 1, 2, \dots, 2000$ και

$$S_y = S_x = 2$$

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει

$$CV_y \leq 0,1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{S_y}{y} \leq 0,1 \Leftrightarrow \frac{2}{14 + a} \leq 0,1 \Leftrightarrow$$

$$1,4 + 0,1a \geq 2 \Leftrightarrow$$

$$0,1a \geq 0,6 \Leftrightarrow$$

$$a \geq 6$$

Οπότε ελάχιστη τιμή του $a = 6$