

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2008
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Θεωρία βιβλίου σελ. 28

Β. Θεωρία βιβλίου σελ. 96

Γ. α. Λάθος, β. Λάθος, γ. Σωστό, δ. Σωστό, ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2^ο

$$f(x) = \frac{x-1}{e^x}, x \in \mathbb{R}$$

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x \cdot f(x)}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x \frac{x-1}{e^x}}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2 - 1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\beta. e^x f'(x) = e^x \left(\frac{x-1}{e^x} \right)' = e^x \cdot \frac{e^x - (x-1)e^x}{e^{2x}} = \frac{e^x(1-x+1)}{e^x} = 2-x$$

γ. π.ο. f, A=ℝ

$$f'(x) = \frac{e^x - (x-1)e^x}{e^{2x}} = \frac{2-x}{e^x}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2-x}{e^x} = 0 \Leftrightarrow 2-x = 0 \Leftrightarrow x = 2$$

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x < 2$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
f'(x)	+	○	-
f(x)	↗		↘

Παρουσιάζει μέγιστο στο $x_0=2$ το $f(2) = \frac{1}{e^2}$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Για τον τύπο Α έχω:

$$\bar{x}_A = \frac{20+26+24+22+18}{5} = \frac{110}{5} = 22 \text{ χιλιάδες ώρες}$$

Για τον τύπο Β έχω:

$$\bar{x}_B = \frac{26+32+19+20+23}{5} = \frac{120}{5} = 24 \text{ χιλιάδες ώρες}$$

β. Για τον τύπο Α έχω:

$$\frac{38}{22} = 1,727 \text{ € το μέσο κόστος για χίλιες ώρες ζωής.}$$

Για τον τύπο Β έχω:

$$\frac{40}{24} = 1,667 \text{ € το μέσο κόστος για χίλιες ώρες ζωής.}$$

Επομένως συμφέρει να αγοράσουμε τον τύπο Β.

$$\begin{aligned} \gamma. S_A^2 &= \frac{(20-22)^2 + (26-22)^2 + (24-22)^2 + (22-22)^2 + (18-22)^2}{5} = \\ &= \frac{4+16+4+0+16}{5} = \frac{40}{5} = 8 \text{ (χιλιάδες ώρες)}^2 \end{aligned}$$

$$\text{άρα } S_A = \sqrt{S_A^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \text{ χιλιάδες ώρες.}$$

$$\begin{aligned} S_B^2 &= \frac{(26-24)^2 + (32-24)^2 + (19-24)^2 + (20-24)^2 + (23-24)^2}{5} = \\ &= \frac{4+64+25+16+1}{5} = \frac{110}{5} = 22 \text{ (χιλιάδες ώρες)}^2 \end{aligned}$$

$$\text{άρα } S_B = \sqrt{S_B^2} = \sqrt{22} \text{ χιλιάδες ώρες.}$$

$$\delta. CV_A = \frac{S_A}{x_A} = \frac{2\sqrt{2}}{22} = \frac{\sqrt{2}}{11} \cong 0,091 \cdot \sqrt{2}$$

$$CV_B = \frac{S_B}{x_B} = \frac{\sqrt{22}}{24} = \frac{\sqrt{11} \cdot \sqrt{2}}{24} \cong \frac{3,3\sqrt{2}}{24} = 0,138 \cdot \sqrt{2}$$

Άρα $CV_A < CV_B$, οπότε το δείγμα Α παρουσιάζει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το δείγμα Β.

ΘΕΜΑ 4^ο

Έστω Α το ενδεχόμενο να διαβάζει την εφημερίδα α και Β το ενδεχόμενο να διαβάζει την εφημερίδα β.

$$\text{Είναι } P(A) = \frac{1}{2} \text{ και } P(A-B) = \frac{3}{10}$$

$$\begin{aligned} \alpha. P(A' \cup B) &= P(A') + P(B) - P(A' \cap B) \\ &= 1 - P(A) + P(B) - P(B-A) \\ &= 1 - P(A) + P(B) - P(B) + P(A \cap B) \\ &= 1 - P(A) + P(A \cap B) \\ &= 1 - [P(A) - P(A \cap B)] \\ &= 1 - P(A-B) = 1 - \frac{3}{10} = \frac{7}{10} \end{aligned}$$

$$\beta. \text{ Ισχύει } P(A-B) = \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A) - P(A \cap B) = \frac{3}{10} \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2} - P(A \cap B) = \frac{3}{10} \Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{5}$$

$$\text{Αλλά } A \cap B \subseteq B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(B) \Leftrightarrow \frac{1}{5} \leq P(B) \quad (1)$$

$$B \subseteq A' \cup B \Rightarrow P(B) \leq P(A' \cup B) \Leftrightarrow P(B) \leq \frac{7}{10} \quad (2)$$

Από (1) και (2) έχω: $\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10}$

γ. $f(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + P(B) \cdot x$ με π.ο $A=\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 - x + P(B)$$

$$\Delta = 1 - 4 \cdot 3 \cdot P(B) = 1 - 12P(B)$$

Αλλά από β έχω: $\frac{1}{5} \leq P(B) \leq \frac{7}{10} \Leftrightarrow$

$$-12 \cdot \frac{7}{10} \leq -12P(B) \leq -12 \cdot \frac{1}{5} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{42}{5} \leq -12P(B) \leq -\frac{12}{5} \Leftrightarrow$$

$$1 - \frac{42}{5} \leq 1 - 12P(B) \leq 1 - \frac{12}{5} \Leftrightarrow$$

$$-\frac{37}{5} \leq \Delta \leq -\frac{7}{5}$$

Δηλαδή $\Delta < 0$ άρα $f'(x) > 0$ (αφού $a=3 > 0$)

για κάθε $x \in \mathbb{R}$

επομένως f γνησίως αύξουσα σε όλο το $\mathbb{R}$ και δεν παρουσιάζει ακρότατα

ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ