

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2005
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

A. 1. Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών (σελ. 192)

A. 2. ορισμός (σελ. 280)

B. α. Λ β. Λ γ. Σ δ. Σ ε. Λ στ. Σ

ΘΕΜΑ 2^ο

$$\alpha. |z_1| = 3 \Rightarrow |z_1|^2 = 9 \Leftrightarrow z_1 \cdot \overline{z_1} = 9 \Leftrightarrow \overline{z_1} = \frac{9}{z_1}$$

$$\beta. \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = z_1 \cdot \frac{1}{z_2} + z_2 \cdot \frac{1}{z_1} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{9} + \frac{z_2 \cdot \overline{z_1}}{9} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2} + z_2 \cdot \overline{z_1}}{9} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot z_2}}{9} \in \mathbb{R}$$

γιατί $z_1 \cdot \overline{z_2} + \overline{z_1 \cdot z_2}$ ως άθροισμα συζυγών μιγαδικών είναι πραγματικός

β' τρόπος

Θα δείξω πρώτα: $z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overline{z} = z$

Έστω $z = x + yi$ τότε: $x - yi = x + yi \Leftrightarrow 2yi = 0 \Leftrightarrow y = 0 \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}}$$

$$\text{Έχουμε: } \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} \right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}} + \frac{\overline{z_2}}{\overline{z_1}} = \frac{9/z_1}{9/z_2} + \frac{9/z_2}{9/z_1} = \frac{z_2}{z_1} + \frac{z_1}{z_2}$$

$$\gamma. |z_1 + z_2 + z_3| = |\overline{z_1 + z_2 + z_3}| = |\overline{z_1} + \overline{z_2} + \overline{z_3}| = \left| \frac{9}{z_1} + \frac{9}{z_2} + \frac{9}{z_3} \right| = 9 \left| \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} \right| =$$

$$9 \left| \frac{z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2}{z_1 z_2 z_3} \right| = 9 \frac{|z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2|}{|z_1| |z_2| |z_3|} = 9 \cdot \frac{|z_2 z_3 + z_1 z_3 + z_1 z_2|}{3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{1}{3} |z_1 \cdot z_2 + z_2 \cdot z_3 + z_3 \cdot z_1|$$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Η f παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) = (e^{\lambda x})' = e^{\lambda x} (\lambda x)' = \lambda e^{\lambda x} > 0$ (αφού $\lambda > 0$) οπότε η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

β. Έστω $(x_0, f(x_0))$ το σημείο επαφής τότε η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \Rightarrow$$

$$y - e^{\lambda x_0} = \lambda e^{\lambda x_0} (x - x_0) \quad (1)$$

Αφού διέρχεται απο το O (0,0) για $x = y = 0$ η (1) γίνεται:

$$-e^{\lambda x_0} = -\lambda e^{\lambda x_0} \cdot x_0 \Leftrightarrow 1 = \lambda x_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{1}{\lambda}$$

οπότε η (1) γίνεται:

$$y - e = \lambda e \left(x - \frac{1}{\lambda} \right) \Rightarrow y - e = \lambda e x - e \Leftrightarrow y = \lambda e x$$

το σημείο επαφής είναι $\left(\frac{1}{\lambda}, e \right)$

γ. Η f είναι 2 φορές παραγωγίσιμη με $f''(x) = (\lambda e^{\lambda x})' = \lambda^2 e^{\lambda x} > 0$ οπότε η f είναι κυρτή σε όλο το $\mathbb{R}$ και η εφαπτόμενη της σε κάθε σημείο θα βρίσκεται «κάτω» από την C_f εκτός του σημείου επαφής

Δηλαδή: $f(x) \geq \lambda e x$

$$E(\lambda) = \int_0^{1/\lambda} |f(x) - \lambda e x| dx = \int_0^{1/\lambda} (e^{\lambda x} - \lambda e x) dx = \left[\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} - \lambda e \frac{x^2}{2} \right]_0^{1/\lambda} = \frac{e-2}{2\lambda} \tau.μ.$$

$$\delta. \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot \frac{e-2}{2\lambda}}{2 + \eta \mu \lambda} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda(e-2)}{2(2 + \eta \mu \lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{e-2}{2\left(\frac{2}{\lambda} + \frac{\eta \mu \lambda}{\lambda}\right)}$$

$$\text{Έχουμε: } \left| \frac{\eta \mu \lambda}{\lambda} \right| \leq \frac{1}{\lambda} \Leftrightarrow -\frac{1}{\lambda} \leq \frac{\eta \mu \lambda}{\lambda} \leq \frac{1}{\lambda} \Rightarrow \frac{2}{\lambda} - \frac{1}{\lambda} \leq \frac{2}{\lambda} + \frac{\eta \mu \lambda}{\lambda} \leq \frac{2}{\lambda} + \frac{1}{\lambda} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\lambda} \leq \frac{2}{\lambda} + \frac{\eta \mu \lambda}{\lambda} \leq \frac{3}{\lambda} \quad (1)$$

$$\text{Επειδή } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} = 0 = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{3}{\lambda}$$

Σύμφωνα με το κριτήριο παρεμβολής $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\lambda} + \frac{\eta \mu \lambda}{\lambda} \right) = 0$ και επιπλέον αφού

$$\frac{2}{\lambda} + \frac{\eta \mu \lambda}{\lambda} \geq \frac{1}{\lambda} > 0 \text{ (λόγω της (1)) και } e-2 > 0 \text{ το } \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\lambda^2 \cdot E(\lambda)}{2 + \eta \mu \lambda} = +\infty$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α.

$$2f'(x) = e^{x-f(x)}$$

$$\Leftrightarrow 2f'(x) = \frac{e^x}{e^{f(x)}} \Leftrightarrow 2e^{f(x)} f'(x) = e^x \Leftrightarrow e^{f(x)} \cdot f'(x) = \frac{e^x}{2} \Leftrightarrow [e^{f(x)}]' = \left[\frac{e^x}{2} \right]'$$

$$\text{οπότε: } e^{f(x)} = \frac{e^x}{2} + c \quad (1)$$

και $f(0)=0$

$$(1) \Rightarrow e^0 = \frac{1}{2} + c \Rightarrow c = \frac{1}{2}$$

$$\text{Οπότε η (1) γίνεται: } e^{f(x)} = \frac{1}{2}(1 + e^x) \Rightarrow f(x) = \ln\left(\frac{1 + e^x}{2}\right)$$

β. Έστω η συνάρτηση $g(x) = \int_0^x f(x-t)dt$

Θέτω $u = x - t \Rightarrow du = -dt$

$$t_1 = 0 \Rightarrow u_1 = x$$

$$t_2 = x \Rightarrow u_2 = 0$$

οπότε: $g(x) = -\int_x^0 f(u)du = \int_0^x f(u)du$

Επειδή $f(u)$ συνεχής στο $\mathbb{R}$, η $g(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ οπότε:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(x-t)dt}{\eta\mu x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x f(u)du}{\eta\mu x} \left(= \frac{0}{0} \right) \text{ σύμφωνα με θεώρημα De L' Hospital}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\left(\int_0^x f(u)du \right)}{(\eta\mu x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sigma\upsilon\nu x} = \frac{f(0)}{\sigma\upsilon\nu 0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$\gamma. h(x) = \int_{-x}^x t^{2005} f(t)dt = \int_{-x}^0 t^{2005} f(t)dt + \int_0^x t^{2005} f(t)dt$$

$$= -\int_0^{-x} t^{2005} f(t)dt + \int_0^x t^{2005} f(t)dt$$

$$h'(x) = -(-x)^{2005} f(-x)(-x)' + x^{2005} f(x) = -x^{2005} f(-x) + x^{2005} f(x) \Rightarrow$$

$$h'(x) = x^{2005} [f(x) - f(-x)] \quad (1)$$

Έχουμε:

$$f(x) - f(-x) = \ln \frac{1+e^x}{2} - \ln \frac{1+e^{-x}}{2} = \ln \frac{1+e^x}{1+e^{-x}} = \ln \frac{1+e^x}{\frac{e^x+1}{e^x}} = \ln e^x = x$$

Οπότε από τη σχέση (1)

$$h'(x) = x^{2005} x = x^{2006}$$

$$g'(x) = \left(\frac{x^{2007}}{2007} \right)' = x^{2006}$$

Δηλαδή: $h'(x) = g'(x)$ σύμφωνα με πόρισμα $h(x) = g(x) + c \quad (2)$

Παρατηρούμε ότι: $h(0)=g(0)=0$

Άρα η σχέση (2) δίνει: $h(x)=g(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$\delta. \int_{-x}^x t^{2005} f(t)dt = \frac{1}{2008} \Leftrightarrow h(x) = \frac{1}{2008} \Rightarrow g(x) = \frac{1}{2008} \Rightarrow \frac{x^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008}$$

$$\text{Θεωρώ τη συνάρτηση } \phi(x) = \frac{x^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008}$$

Η ϕ συνεχής στο $[0,1]$ (ως πολωνυμική)

$$\phi(0) = -\frac{1}{2008} < 0$$

$$\phi(1) = \frac{1}{2007} - \frac{1}{2008} > 0$$

άρα $\phi(0)\phi(1)<0$

οπότε σύμφωνα με θεώρημα Bolzano

υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in (0,1)$: $\phi(x_0)=0 \Leftrightarrow \frac{x_0^{2007}}{2007} = \frac{1}{2008}$

Η ϕ παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $\phi'(x)=x^{2006}>0$ για κάθε $x \in (0,1)$, άρα η ϕ γνησίως αύξουσα στο $(0,1)$ οπότε η παραπάνω λύση είναι μοναδική.

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ

