ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2008
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

<u>ΘΕΜΑ 1^{ο}</u>

Α. 1 Θεωρία: (Απόδειξη) σελ. 235

Α.2 Θεωρία: (ορισμός) σελ. 191

Β. α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Σωστό

<u>ΘΕΜΑ 2^{ο}</u>

α) Είναι $\left|i+2\sqrt{2}\right|\cdot|z|=6 \Leftrightarrow \sqrt{1^2+\left(2\sqrt{2}\right)^2}\cdot|z|=6$

$\Leftrightarrow \sqrt{9}\cdot|z|=6 \Leftrightarrow |z|=2$.

Άρα η εικόνα του z ανήκει στον κύκλο κέντρου Κ(0,0) και ακτίνας ρ=2

β) Η εικόνα του w είναι η μεσοκάθετος ε του τμήματος ΑΒ με Α(1,-1) και Β(3,-3). Για την εξίσωση της μεσοκαθέτου ε

Θέτω w=x+yi στη σχέση $|w-(1-i)|=|w-(3-3i)|$

$\Leftrightarrow |x+yi-(1-i)|=|x+yi-(3-3i)|$

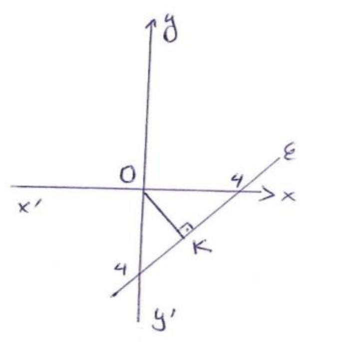
$\Leftrightarrow |(x-1)+(y+1)i|=|(x-3)+(y+3)i| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-3)^2+(y+3)^2}$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+2y+1=x^2-6x+9+y^2+6y+9$

$\Leftrightarrow 4x-16=4y \Leftrightarrow y=x-4$

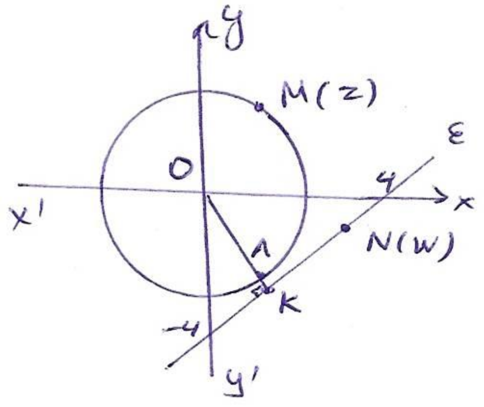
Εικόνα του w: Η ευθεία ε:y=x-4

γ)



Είναι $\min|w|=d(\mathrm{O},\varepsilon)=\dfrac{|0-0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{2}}=\dfrac{4\sqrt{2}}{2}=2\sqrt{2}$

δ)



Είναι $d(O,\varepsilon)=2\sqrt{2}>2=\rho(\alpha\pi o\ \alpha\ \kappa\alpha\iota\ \gamma)$ άρα η ευθεία είναι εξωτερική στον κύκλο.
Άρα $\min|z-w|=d(O,\kappa)-\rho=2\sqrt{2}-2=2\left(\sqrt{2}-1\right)$

ΘΕΜΑ 3^{o}

α) Πρέπει $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$

Είναι: $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\lim\limits_{x\to 0}(x\ln x)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(-x)=0$

Άρα η f συνεχής στο $x_0=0$

β) Είναι $D_f=[0,+\infty)$

Για x>0, $f'(x)=(x\ln x)'=\ln x+1$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \ln x+1=0 \Leftrightarrow \ln x=-1$

$\Leftrightarrow x=e^{-1} \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{e}$

$f'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x+1>0 \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{e}$

$f'(x)<0 \Leftrightarrow \ln x+1<0 \Leftrightarrow 0<x<\dfrac{1}{e}$

x	0		$1/e$	
f'		-	0	+
f		↘		↗

Η f συνεχής στο $[0,+\infty)$

f γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{e},+\infty\right)$

f γνησίως φθίνουσα στο $\left[0,\frac{1}{e}\right]$

Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στο $x_1 = \frac{1}{e}$ το

f$\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e}\cdot\ln\frac{1}{e}=\frac{1}{e}\cdot(\ln 1-\ln e)=-\frac{1}{e}$

Στο x_2=0 η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το f(0)=0

Σύνολο τιμών της f:

$$f([0,+\infty))=f\left(\left[0,\frac{1}{e}\right]\right)\cup f\left(\left[\frac{1}{e},+\infty\right)\right)$$

$$=\left[f\left(\frac{1}{e}\right),f(0)\right]\cup[f\frac{1}{e},\lim_{x\to+\infty}f(x)$$

$$=\left[-\frac{1}{e},0\right]\cup\left[-\frac{1}{e},+\infty\right)$$

(αφού $\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x\ln x)=+\infty$)

Άρα: $f([0,+\infty))=\left[-\frac{1}{e}.+\infty\right)$

γ) $x=e^{\frac{a}{x}}\overset{(x>0)}{\Leftrightarrow}\ln x=\ln e^{\frac{a}{x}}$

$\Leftrightarrow \ln x=\frac{a}{x}\ln e$

$\Leftrightarrow x\ln x=a\Leftrightarrow f(x)=a,\ a\in R$ (1)

Άρα: Από το σύνολο τιμών της f έχουμε:

- Αν $a<-\frac{1}{e}$, είναι αδύνατη η (1)
- Αν $a=-\frac{1}{e}$, η (1) έχει ακριβώς μία ρίζα
- Αν $-\frac{1}{e}<a<0$ η (1) έχει δυο ακριβώς ρίζες
- Αν α≥ 0 η (1) έχει μία ακριβώς ρίζα

δ) έχω f΄΄(x)=(lnx+1)΄=$\frac{1}{x}>0$ για x>0

άρα η f΄γνησίως αύξουσα στο $(0+\infty)$

Στο διάστημα $[x,x+1]$ για την f ισχύει το ΘΜΤ, άρα υπάρχει ένα τουλάχιστο

$\xi\in(x,x+1))$ ώστε f΄(ξ)$=\frac{f(x+1)-f(x)}{x+1-x}\Leftrightarrow f'(\xi)=f(x+1)-f(x)$ (1)

Έχουμε: $0<x<\xi<x+1$

$$\overset{f' \gamma\nu.\alpha\upsilon\xi.\sigma\tau o[x,x+1]}{\Leftrightarrow} f'(\xi)<f'(x+1)\overset{(1)}{\Leftrightarrow}f(x+1)-f(x)<f'(x+1)$$

ΘΕΜΑ 4ο

α) Έστω $\int_0^2 f(t)dt = c, c \in R \quad (1)$

Άρα $f(x) = (10x^3 + 3x)c - 45 = 10cx^3 + 3cx - 45$

Άρα $(1): \int_0^2 (10ct^3 + 3ct - 45)dt = c$,

$$\left[10c \cdot \frac{t^4}{4} + 3c \cdot \frac{t^2}{2} - 45t\right]_0^2 = c,$$

$10 \cdot c \cdot \frac{2^4}{4} + 3 \cdot c \cdot \frac{2^2}{2} - 45 \cdot 2 = c$,άρα $45c = 90$,άρα $c = 2$.

Έτσι η σχέση της υπόθεσης γράφεται:

$$f(x) = (10x^3 + 3x) \cdot 2 - 45 \text{ , } f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$

β) $\lim_{h \to 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h} = \lim_{t \to 0} \frac{g'(x) - g'(x+t)}{-t} =$

Θέτω $t = -h$ αφού $h \to 0$, έχω $t \to 0$

$= -\lim_{t \to 0} \frac{g'(x+t) - g'(x)}{-t} = \lim_{t \to 0} \frac{g'(x+t) - g'(x)}{t} = g''(x)$

γ)i) Έχω $\lim_{h \to 0} \frac{g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)}{h^2} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{h \to 0} \frac{[g(x+h) - 2g(x) + g(x-h)]'}{(h^2)'} =$

$= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{g'(x+h) - g'(x-h)}{h} =$

$= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{[g'(x+h) - g'(x) + g(x) - g'(x-h)]}{h} =$

$= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \left[\frac{g'(x+h) - g'(x)}{h} + \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}\right] =$

$= \frac{1}{2}[g''(x) + g''(x)] = \frac{1}{2} \cdot 2g''(x) = g''(x)$.

Άρα η σχέση που δίνεται στην υπόθεση του σκέλους γ) γράφεται:

$g''(x) = 20x^3 + 6x$,

$g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + c_1 \quad , \quad c_1 \in R$

Όμως $g'(0) = 1 \quad , \quad g'(0) = c_1 \quad , \quad c_1 = 1$

Άρα $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1$

Έτσι $g(x) = x^5 + x^3 + x + c_2$

$g(0) = 1$, $g(0) = c_2$, άρα $c_2 = 1$

$g(x) = x^5 + x^3 + x + 1$

ii) Έχω $g'(x) = 5x^4 + 3x^2 + 1 > 0$, $x \in R$

άρα g είναι γνησίως αύξουσα στο R, δηλαδή “1-1”.