ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2002
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^{o}

Α. ΘΕΩΡΙΑ ΣΧ. ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛ. 325
Β1. ΘΕΩΡΙΑ ΣΧ. ΒΙΒΛΙΟ ΣΕΛ. 225
Β2. α. Λ β. Λ γ. Σ δ. Σ ε. Σ

ΘΕΜΑ 2^{o}

α. $f(3) = i^3 z = -iz$

$f(8) = i^8 z = z$

$f(13) = i^{13} z = iz$

$f(18) = i^{18} z = -z$

Αρα $f(3) + f(8) + f(13) + f(18) = -iz + z + iz - z = 0$

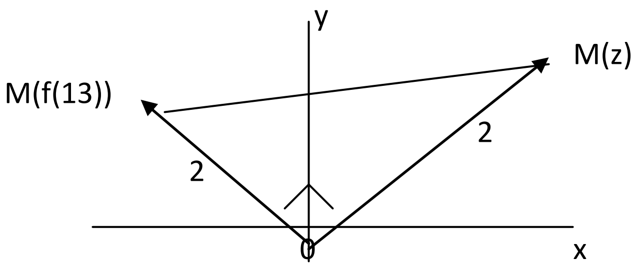
β. $z = \rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta)$ $\quad i = \sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{2} + i\eta\mu\dfrac{\pi}{2}$

$$f(13) = iz = \left(\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{2} + i\eta\mu\frac{\pi}{2}\right)\rho(\sigma\upsilon\nu\theta + i\eta\mu\theta) = \rho\left(\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) + i\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right)\right)$$

γ. $z = 2\left(\sigma\upsilon\nu\dfrac{\pi}{3} + i\eta\mu\dfrac{\pi}{3}\right)$ Με εικόνα M(z)

$f(13) = 2\left(\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right) + i\eta\mu\left(\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{3}\right)\right)$ Με εικόνα M(f(13))

Το τρίγωνο που ζητάμε είναι το Δ OM(z)M(f(13))



Το οποίο είναι ορθογώνιο στο Ο και ισοσκελές καθώς $|z| = |f(13)| = z$. Αρα

$$E_{OM(Z)M(f(13))} = \frac{2.2}{2} = 2$$

ΘΕΜΑ 3^{o}

α. Επειδή f_{og} 1-1 ισχύει ότι

$f(g(x_1)=f(g(x_2)) \Rightarrow x_1=x_2$

Θ.δ.ο. $g(x_1)=g(x_2) \Rightarrow x_1=x_2$

$g(x_1)=g(x_2) \Rightarrow f(g(x_1))=f(g(x_2))$ (από τον ορισμό της συνάρτησης)

$\overset{fog:1-1}{\Rightarrow} x_1 = x_2$

β. $g(f(x)+x^3-x)=g(f(x)+2x-1) \overset{g:1-1}{\Rightarrow}$

$f(x)+x^3-x=f(x)+2x-1 \Rightarrow x^3-3x+1=0$

Έστω $h(x)=x^3-3x+1 \Rightarrow h'(x)=3x^2-3=3(x-1)(x+1)$

	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
h'		+		-		+	
h		↗	$h(-1)=3$	↘	$h(1)=-1$	↗	

$\lim\limits_{x\to-\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$ άρα υπάρχει $a < -1$ τέτοιο ώστε $h(a) < 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$ άρα υπάρχει $\beta > 1$ τέτοιο ώστε $h(\beta) > 0$

Εφαρμόζουμε Bolzano στα $[\alpha,-1]$ και $[1,\beta]$. Η h συνεχής και

$h(a).h(-1) < 0$

Άρα υπάρχει $\xi_1 \in h(1).h(\beta) < 0$ $(a,-1)$ και $\xi_2 \in (1,\beta)$ τέτοιο ώστε $h(\xi_1) = 0 = h(\xi_2)$

Τα ξ_1, ξ_2 είναι μοναδικά καθώς η h γνησίως μονότονη κατά διαστήματα.

Παρατηρώ ότι $h(0) = 1 > 0$ και ελέγχω Bolzano στο $[0,1]$

Η h συνεχής και $h(0).h(1) < 0$ άρα υπάρχει $\xi_3 \varepsilon (0,1)$ τέτοιο ώστε $h(\xi_2) = 0$ και το ξ_2 είναι μοναδικό καθώς η h είναι γνησίως μονότονη.

Αρα ξ_3, ξ_2 : οι θετικές λόγω διαστήματος ρίζες

ξ_1 : η αρνητική

ΘΕΜΑ 4^{o}

α. $h(x)>g(x)\Rightarrow h(x)-g(x)>0$, $\forall x\in R$

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta}\big(h(x)-g(x)dx\big)dx>0\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta}h(x)dx-\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx>0\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta}h(x)dx>\int_{\alpha}^{\beta}g(x)dx$$

β. i.

$$\left(f(x)-e^{-f(x)}\right)'=(x-1)'\Rightarrow f'(x)+f'(x)e^{-f(x)}=1\Rightarrow f'(x)(1+e^{-f(x)})=1\Rightarrow f'(x)=\frac{1}{1+e^{-f(x)}}>0$$

ii.

Καθώς $f'(x)>0$ έχουμε ότι f : γνησίως αύξουσα

Αρα $0<x\Rightarrow f(0)<f(x)\Rightarrow 0<f(x)$

Αρα η $f(x)$: θετική για κάθε x>0

- $\frac{x}{2}<f(x)\Leftrightarrow 0<f(x)-\frac{x}{2}$, για κάθε $x>0$

Εστω $g(x)=f(x)-\frac{x}{2}$ και $g(0)=0$

Αρκεί ν. δ.ο. $g(0)<g(x)$ για κάθε $x>0$ δηλαδή

Αρκεί ν.δ.ο. η g: γνησίως αύξουσα, δηλ. $g'(x)>0$

$$g'(x)=f'(x)-\frac{1}{2}\overset{i}{\Rightarrow}g'(x)=\frac{1}{1+e^{-f(x)}}-\frac{1}{2}$$

Όμως $f(x)>0\Rightarrow -f(x)<0\Rightarrow e^{-f(x)}<e^{0}=1$

Αρα $1+e^{-f(x)}<2\Rightarrow \frac{1}{1+e^{-f(x)}}>\frac{1}{2}\Rightarrow \frac{1}{1+e^{-f(x)}}-\frac{1}{2}>0\Rightarrow g'(x)>0$

- $f(x)<xf'(x)$ αρκεί $xf'(x)-f(x)>0$

Εστω $h(x)=xf'(x)-f(x)$

$$h'(x)=(xf'(x)-f(x))'=f'(x)+xf''(x)-f'(x)=x\cdot f''(x)=x\left(\frac{1}{1+e^{-f(x)}}\right)'=x\frac{-(1+e^{-f(x)})'}{(1+e^{-f(x)})^{2}}=$$

$$=x\frac{e^{-f(x)}f'(x)}{\left(1+e^{-f(x)}\right)^{2}}$$

Επειδή $f'(x)>0,\ x>0$ και $e^{-f(x)}>0$ είναι $h'(x)>0$ άρα h γνησίως αύξουσα.

Αφού $x>0$ είναι και $h(x)>h(0)$ ή

$xf'(x)-f(x)>0.f'(0)-f(0)$, $xf'(x)-f(x)>0$ οπότε: $xf'(x)>f(x)$ ΟΕΔ.

iii. $E=\int_0^1 |f(x)|dx \overset{f(x)>0}{=} \int_0^1 f(x)dx$

Υπολογίζω το $\int_0^1 xf'(x)dx$. Με παραγοντική ολοκλήρωση

$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 (x)' f(x)dx=[xf(x)]_0^1-\int_0^1 xf'(x)dx \Rightarrow \int_0^1 xf'(x)dx=f(1)-\int_0^1 f(x)dx$ (1)

Την ανίσωση του ii. τη σπάω

$\frac{x}{2}<f(x)\Rightarrow \int_0^1 \frac{x}{2}dx<\int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1<\int_0^1 f(x)dx \Rightarrow \frac{1}{4}<E$ (2)

$f(x)<xf'(x)\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx<\int_0^1 xf'(x)dx \overset{(1)}{\Rightarrow} E<f(1)-E\Rightarrow 2E<f(1)\Rightarrow E<\frac{1}{2}f(1)$ (3)

Από (2) και (3) $\frac{1}{4}<E<\frac{1}{2}f(1)$.