ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2006
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^{ο}

Α. **1.** Θεωρία σελ.253

2. Θεωρία σελ. 273

Β. **α)** Λάθος

β) Σωστό

γ) Σωστό

δ) Λάθος

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ 2^{ο}

α) f(x) =2+x^2-4x+4=x^2-4x+6, $x \geq 2$

f΄(x) =2(x-2)>0, x>2, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο [2, $+\infty$),

άρα «1-1».

β) Αφού η f είναι «1-1» είναι αντιστρέψιμη. Η f είναι συνεχής στο [2, $+\infty$) και γνησίως αύξουσα, άρα

$f(A) = f([2,+\infty)) = [f(2), \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = [2,+\infty)$, αφού

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(x^2-4x+6) = \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$

Έχω $\left.\begin{matrix} y=f(x) \\ x\geq 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} y=x^2-4x+6 \\ x\geq 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^2-4x+6-y=0 \\ x\geq 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x=2+\sqrt{y-2} \\ x\geq 2 \end{matrix}\right\}$

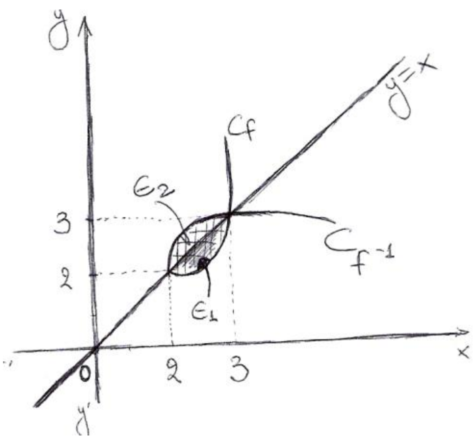
ή $\begin{matrix} x=2-\sqrt{y-2} \\ x\geq 2 \end{matrix}$ απορρίπτεται.

Άρα $f^{-1}:[2,+\infty) \to R$

με $f^{-1}(x) = 2+\sqrt{x-2}$

γ) i. $\left.\begin{matrix} f(x)=x \\ x\geq 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^2-4x+6=x \\ x\geq 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x^2-5x+6=0 \\ x\geq 2 \end{matrix}\right\} \Leftrightarrow$ x=2 ή x=3, άρα τα κοινά σημεία είναι Α(2,2), Β(3,3)

ii. Τα κοινά σημεία των Cf, Cf^{-1} είναι τα Α(2,2), Β(3,3)



Άρα $E = \int_2^3 \left| f(x) - f^{-1}(x) \right| dx$

$= \varepsilon_1 + \varepsilon_2 = 2\varepsilon_1$

$= 2\int_2^3 (x - f(x))dx$

$= 2\int_2^3 (x - x^2 + 4x - 6)dx$

$= 2[-\frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 - 6x]_2^3 = \frac{1}{3}$ τ.μ.

ΘΕΜΑ 3^{ο}

α. i. $|z_1 - z_2| = |z_2 - z_3| \Leftrightarrow$

$|z_1 - (-z_1 - z_3)| = |-z_1 - z_3 - z_3|$ ή

$|2z_1 + z_3| = |z_1 + 2z_3|$ ή

$|2z_1 + z_3|^2 = |z_1 + 2z_3|^2$ ή

$(2z_1 + z_3)(2\bar{z}_1 + \bar{z}_3) = (z_1 + 2z_3)(\bar{z}_1 + 2\bar{z}_3)$ ή

$4z_1\bar{z}_1 + 2z_1\bar{z}_3 + 2\bar{z}_1 z_3 + z_3\bar{z}_3 = z_1\bar{z}_1 + 2z_1\bar{z}_3 + 2\bar{z}_1 z_3 + 4z_3\bar{z}_3$

$3|z_1|^2 = 3|z_3|^2$ ή $|z_1| = |z_3|$ ισχύει

Όμοια $|z_3 - z_1| = |z_2 - z_3|$

ii. $|z_1 - z_2|^2 \leq 4$ ή $|z_1 - z_2| \leq 2$

Αφού οι εικόνες των μιγαδικών διατρέχουν το μοναδιαίο κύκλο η απόσταση των εικόνων τους θα είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου που είναι 2

- $|z_1 - z_2|^2 \leq 4 \Leftrightarrow$

$(z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) \leq 4 \Leftrightarrow$

$1 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + 1 \leq 4 \Leftrightarrow$

$z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 \geq -2 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_2 + \left(\overline{z_1\bar{z}_2}\right) \geq -2 \Leftrightarrow$

$2\,\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \geq -1$

β. Οι εικόνες των z_1, z_2, z_3 βρίσκονται στο μοναδιαίο κύκλο και επειδή οι αποστάσεις των εικόνων τους (σύμφωνα με το α. i) είναι ίσες θα είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

ΘΕΜΑ 4^{ο}

α) A= $\{x \in R / x \neq 1 \;\kappa\alpha\iota\; x > 0\} = (0,1) \cup (1,+\infty)$

Η f είναι παραγωγίσιμη ως πράξη παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$f'(x) = -\dfrac{2}{(x-1)^2} - \dfrac{1}{x} < 0, x \in A,$ άρα η f είναι γνησίως φθινούσα στο (0,1) και γνησίως φθίνουσα στο (1, $+\infty$)

x	0	1 $\qquad +\infty$
f΄ (x)	-	-
f(x)	$+\infty \searrow -\infty$	$+\infty \searrow -\infty$

Με την f συνεχή στο A, έχω

$$f(A)=f\big((0,1)\big)\cup f\big((1,+\infty)\big)=\left(\lim_{x\to 1^-} f_{(x)},\lim_{x\to 0^+} f_{(x)}\right)\cup\left(\lim_{x\to +\infty} f(x),\lim_{x\to 1^+} f(x)\right)=(-\infty,+\infty)\cup(-\infty,+\infty)=R$$

άρα

$\lim\limits_{x\to 1^1} f(x) \;=\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=-\infty,$ με

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+1}{x-1}-\infty,$ και $\lim\limits_{x\to 1^-}(x+1)=2>0,$

$\lim\limits_{x\to 1^-}(x-1)=0,$ και $x-1<0$, ενώ $\lim\limits_{x\to 1^-}\ln x=\ln 1=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=+\infty,$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x+1}{x-1}$ =-1 με $\lim\limits_{x\to 0^+}(-\ln x)=+\infty$

$\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=+\infty,$ αφού

$\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x+1}{x-1}=+\infty$ με $\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)=2>0,$

$\lim\limits_{x\to 1^+}(x-1)=0$ και x-1>0

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x\right)=-\infty$, αφού

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{x}{x}=\lim\limits_{x\to +\infty}1=1$ και

$\lim\limits_{x\to +\infty}(-\ln x)=-\infty$

β) Με τη f συνεχή στο (0,1) και f((0,1)]=R από το α) σκέλος, η f έχει μία τουλάχιστον πραγματική ρίζα στο (0,1), Και επειδή η f είναι γνησίως φθίνουσα η ρίζα είναι μοναδική. Ομοίως στο (1, +∞) από το α) σκέλος η f έχει μία ακριβώς πραγματική ρίζα. Επομένως η f έχει δύο ακριβώς πραγματικές ρίζες.

γ) Έστω (ε) η εφαπτομένη της C_g στο σημείο Α(α, lnα), με α>0. Θα είναι η εξίσωση της:

$y-g(a)=g'(a)(x-a),$ άρα

$y-\ln a=\dfrac{1}{a}(x-a)\Leftrightarrow y=\dfrac{1}{a}x+\ln a-1$ (1)

Ανάλογα αν (δ) είναι η εφαπτομένη της Cf στο Β(β,e^{β}), $\beta\in R$, θα είναι

$y-h(\beta)=h'(\beta)(x-\beta)$, άρα

$y-e^{\beta}=e^{\beta}(x-\beta)\Leftrightarrow y=e^{\beta}x+e^{\beta}-\beta e^{\beta}$ (2)

Αφού ε και δ ταυτίζονται θα έχω

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{1}{\alpha} = e^{\beta} \\ \ln a - 1 = e^{\beta} - \beta e^{\beta} \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \beta = -\ln a \\ \ln a - 1 = \dfrac{1}{a} - (-\ln a)\dfrac{1}{a} \end{array} \Leftrightarrow$$

$a + 1 - a\ln a + \ln a = 0 \Leftrightarrow a + 1 - (a-1)\ln a = 0 \Leftrightarrow$
$\dfrac{a+1}{a-1} - \ln a = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0$. Άρα το α είναι ρίζα της εξίσωσης f(x)=0

δ) Από το σκέλος γ) προκύπτει ότι οι Cg, Ch έχουν κοινή εφαπτομένη στα σημεία Α(α, lnα), Β(β, e^{β}) αντίστοιχα των δύο γραφικών παραστάσεων, με το α ρίζα της f(x)=0. Επειδή f έχει ακριβώς δύο ρίζες στο πεδίο ορισμού της (σκέλος β), άρα θα υπάρχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες των C_g και C_h