

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2004
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^ο

Α. Θ. Fermat σελ. 260

Β. Ορισμός σελ 213.

- Γ.** α. Σωστό
β. Σωστό
γ. Λάθος
δ. Λάθος
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2^ο

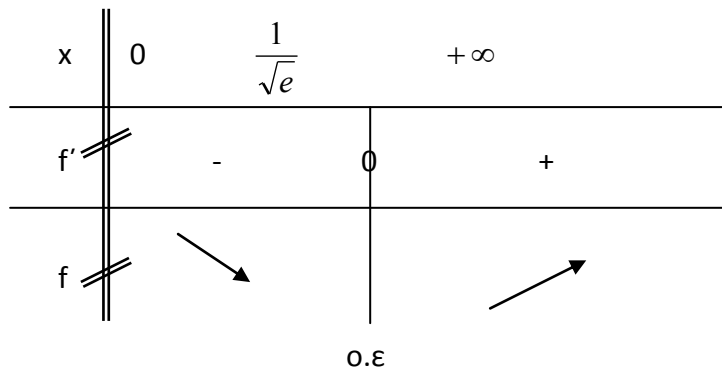
α. $D_f = (0, +\infty)$

$$f'(x) = 2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1). \quad \parallel \quad x > 0$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2}} = x \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Για $x > \frac{1}{\sqrt{e}}$ είναι $f'(x) > 0$

$0 < x < \frac{1}{\sqrt{e}}$ είναι $f'(x) < 0$



$$f \text{ στο } \left(0, \frac{1}{\sqrt{e}}\right]$$

$$f \uparrow \text{ στο } \left[\frac{1}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$$

Για $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ παρουσιάζει ελάχιστο (ολικό) με τιμή $f\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} \ln e^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2e}$

β. $f''(x) = 2 \ln x + 1 = 2 \ln x + 3$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{3}{2} \Leftrightarrow e^{-\frac{3}{2}} = x$$

$$f \text{ κοίλη στο } \left(0, e^{-\frac{3}{2}}\right]$$

$$f \text{ κυρτή στο } \left[e^{-\frac{3}{2}}, +\infty\right)$$



ΣΚ $\left(e^{-\frac{3}{2}}, f\left(e^{-\frac{3}{2}}\right)\right)$ δηλ. $\left(e^{-\frac{3}{2}}, -\frac{3}{2e^3}\right)$

γ. f συν. στο $(0, +\infty)$

$$\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^3}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2}{2} = 0 \right]$$

Μπορείς και να μην το βρεις

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\underset{+\infty}{x^2} \underset{+\infty}{\ln x} \right) = +\infty$$

$$\Sigma.T = \left[-\frac{1}{2e}, +\infty \right)$$

ΘΕΜΑ 3^ο

α. Θεωρώ την $g(x) = e^x f(x)$

g παρ. στο $\left(0, \frac{3}{2} \right)$

g συν. στο $\left[0, \frac{3}{2} \right]$

$$\left. \begin{aligned} g(0) &= e^0 f(0) = 0 \\ g\left(\frac{3}{2}\right) &= e^{\frac{3}{2}} f\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \end{aligned} \right| g(0) = g\left(\frac{3}{2}\right)$$

Θ. Rolle: Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in \left(0, \frac{3}{2} \right)$:

$$\left. \begin{aligned} g'(\xi) &= 0 \\ g'(x) &= e^x f(x) + e^x f'(x) \end{aligned} \right| \Rightarrow e^\xi f(\xi) + e^\xi f'(\xi) = 0$$

$$e^\xi (f(\xi) + f'(\xi)) = 0$$

$$(e^\xi > 0)$$

$$f(\xi) + f'(\xi) = 0$$

$$f'(\xi) = -f(\xi)$$

$$\beta. f(x) = 2x^2 - 3x \parallel R \quad f'(x) = 4x - 3 \parallel R \quad f''(x) = 4 \parallel R$$

$$\begin{aligned} I(a) &= \int_a^0 e^x f(x) dx = \int_a^0 (e^x)' \cdot f(x) dx = [e^x f(x)]_a^0 - \int_a^0 e^x f'(x) dx = \\ &= -e^a f(a) - \int_a^0 (e^x)' \cdot f'(x) dx = -e^a f(a) - \left([e^x \cdot f'(x)]_a^0 - \int_a^0 e^x \cdot f''(x) dx \right) = \\ &= -e^a f(a) - \left(f'(0) - e^a f'(a) - \int_a^0 4e^x dx \right) = \\ &= -e^a f(a) - \left[-3 - e^a (4a - 3) - 4[e^x]_a^0 \right] = \\ &= -e^a f(a) + 3 + e^a (4a - 3) + 4(e^0 - e^a) = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -e^a f(a) + 3 + 4ae^a - 3e^a + 4 - 4e^a = \\
&= -e^a f(a) + 4ae^a - 7e^a + 7 = e^a (-f(a) + 4a - 7) + 7 = \\
&= e^a (-2a^2 + 3a + 4a - 7) + 7 = e^a (-2a^2 + 7a - 7) + 7
\end{aligned}$$

γ. Όταν $a \rightarrow -\infty$ τότε $e^a \rightarrow 0$

$$\begin{aligned}
\lim_{a \rightarrow -\infty} I(a) &= \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^a (-2a^2 + 7a - 7) + 7] = \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^a \cdot (-2a^2 + 7a - 7)] + 7 \stackrel{(0 \cdot -\infty)}{=} \\
&= \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\frac{-2a^2 + 7a - 7}{e^{-a}} \right) + 7 = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{-4a + 7}{-e^{-a}} + 7 = \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{4a - 7}{e^{-a}} + 7 \stackrel{\frac{-\infty}{+\infty}}{=} \\
&= \lim_{a \rightarrow -\infty} \frac{4}{-e^{-a}} + 7 = 0 + 7 = 7
\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ 4^ο

α. Η g γράφεται: $g(x) = |z| \cdot \int_1^{x^3} f(t) dt - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| \cdot (x-1)$ και επειδή f συνεχής στο

$R \Rightarrow g$ παραγωγίσιμη στο R με $g'(x) = |z| \cdot f(x^3) \cdot 3x^2 - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right|$

β. $\left. \begin{array}{l} g(x) \geq 0 \\ g(1) = 0 \end{array} \right| \text{ για κάθε } x \in R \Rightarrow g(x) \geq g(1), \quad x \in R$

Η g παρουσιάζει στο 1 ελάχιστο άρα (Θ. Fermat)

$$g'(1) = 0 \Leftrightarrow |z| \cdot f(1) \cdot 3 - 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| = 0 \Leftrightarrow 3|z| = 3 \left| z + \frac{1}{z} \right| \Leftrightarrow |z| = \left| z + \frac{1}{z} \right|$$

γ. $z^2 = (a + \beta i)^2 = a^2 - \beta^2 + 2a\beta i \Rightarrow \operatorname{Re}(z^2) = a^2 - \beta^2$

$$|z| = \left| z + \frac{1}{z} \right| \Leftrightarrow |z|^2 = \left| z + \frac{1}{z} \right|^2 \Leftrightarrow z\bar{z} = \left(z + \frac{1}{z} \right) \left(\bar{z} + \frac{1}{\bar{z}} \right) \Leftrightarrow \frac{z^2 + \bar{z}^2 + 1}{z\bar{z}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$z^2 + \bar{z}^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow a^2 - \beta^2 + 2a\beta i + a^2 - \beta^2 - 2a\beta i + 1 = 0 \Leftrightarrow 2(a^2 - \beta^2) = -1 \Leftrightarrow$$

$$a^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2} \quad \text{δηλ.} \quad \operatorname{Re}(z^2) = -\frac{1}{2}$$

δ. f συν. στο $[2, 3]$

$$f(2) \cdot f(3) = a \cdot \beta < 0 \quad \text{γιατί:} \quad \alpha^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) < 0 \\ \alpha - \beta > 0 \end{array} \right| \Rightarrow$$

$$\alpha + \beta < 0 \Leftrightarrow \beta < -\alpha \quad \text{δηλ.} \quad \left. \begin{array}{l} \beta < 0 \\ \alpha > 0 \end{array} \right| \Rightarrow \alpha\beta < 0$$

Άρα (Θ. Bolzano): Υπάρχει $x_0 \in (2, 3) : f(x_0) = 0$

ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ
ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ

