ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2003
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1^o

Α. Θεωρία βιβλίου σελ. 217
Β. Θεωρία βιβλίου σελ. 247
Γ. α. Σ
β. Σ
γ. Σ
δ. Λ
ε. Λ

ΘΕΜΑ 2^o

α) z=α+βi $\Rightarrow \bar{z} = a - \beta i$
$\alpha, \beta \in R$
w=3(α+βi)-i(α-βi)+4=3α+3βi-αi-β+4= (3α-β+4)+i(3β-α) $\Rightarrow$ Re(w)=3α-β+4
Im (w)=3β-α

β) Έστω w=x+yi οπότε ισχύει y=x-12 (1)
x, y $\in$ R

αλλά $\left.\begin{matrix} x = 3a - \beta + 4 \\ y = 3\beta - \alpha \end{matrix}\right| \overset{(1)}{\Rightarrow} 3\beta - \alpha = 3\alpha - \beta + 4 - 12 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$ 4α-4β=8 $\Leftrightarrow$ α-β=2 $\Leftrightarrow$ β=α-2 δηλαδή οι εικόνες του z κινούνται στην ευθεία με εξίσωση y=x-2

γ) z=α+βi και είναι σημείο της y=x-2 Ελάχιστο μέτρο θα έχει ο μιγαδικός που έχει εικόνα το σημείο τομής της (ε) και της κάθετης από το 0 στην (ε) η οποία έχει εξίσωση y=-x ως κάθετη στη προηγούμενη

$\left.\begin{matrix} y = x - 2 \\ y = -x \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} -x = x - 2 \\ y = -x \end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left.\begin{matrix} x = 1 \\ y = -1 \end{matrix}\right| \Leftrightarrow$

Σημειο τομής (1, -1) δηλαδή z=1-i

ΘΕΜΑ 3^o

f ορίζεται στο R, είναι συνεχής και παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική
α) f(x)=5x^2+3x^2+1>0 για κάθε x$\in$R $\Rightarrow$ f $\uparrow$ στο R
f΄΄ (x)=20x^3+6x=2x(10x^2+3)

	$-\infty$	0	$+\infty$
f΄΄	-	0	+
f	$\cap$		$\cup$

f κοίλη στο (-∞, 0]
f κυρτή στο [0, +∞)

f γνησίως μονότονη στο R $\Rightarrow$ f είναι 1-1 άρα έχει αντίστροφη συνάρτηση

β) $f(e^x) \geq f(1+x),\ x \in R$ | $\Leftrightarrow e^x \geq 1+x,\ x \in R$

$f \uparrow$ | που ισχύει γιατί:

Θέτω $g(x)=e^x-x-1$ για κάθε x R και είναι $g'(x)=e^x-1$

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$

$g(x) \geq g(0),\ x \in R$

$e^x-x-1 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq x+1,\ x \in R$

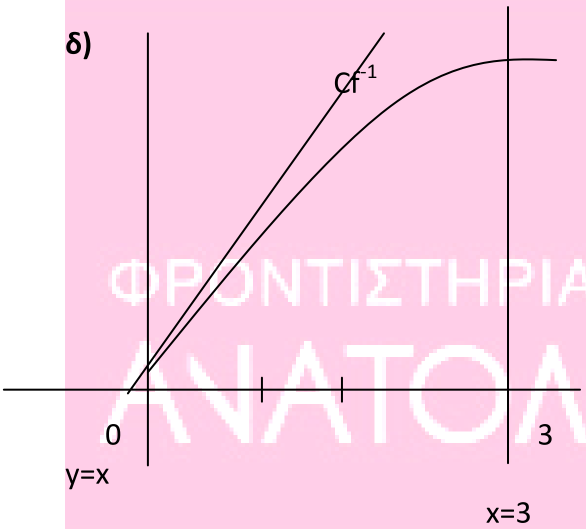
	$-\infty$	0	$+\infty$
g'	-	0	+
g	↘		↗

γ) Η εφαπτομένη της C_f στο (0,0) έχει εξίσωση

$$\left.\begin{array}{l} y-f(0)=f'(0)(x-0) \\ f(0)=0 \ \ \kappa\alpha\iota \ \ f'(0)=1 \end{array}\right| \Leftrightarrow y=x$$

που είναι προφανώς άξονας συμμετρίας των f και f^{-1}

δ)



Βρίσκω τα όρια ολοκλήρωσης $f^{-1}(x)=0 \Leftrightarrow f(f^{-1}(x))=f(0)$ δηλαδή $x=f(0) \Leftrightarrow x=0$

Η f^{-1} είναι 1-1 αφού αντιστρέψιμη άρα δεν έχει άλλες ρίζες

$$E(\Omega)=\int_0^3 \left|f^{-1}(x)\right| dx \ (1)$$

f^{-1} διατηρεί πρόσημο στο [0,3] ως συνεχής $f^{-1}(3)=1>0 \Rightarrow f^{-1}>0$

$(1) \Leftrightarrow \int_0^3 f^{-1}(x)dx$ Θέτω $x=f(u)$

$x=0\ f(u)=0 \Leftrightarrow 4=0$

$x=3\ f(u)=3 \Leftrightarrow 4=1$

$$\int_0^1 f^{-1}(f(u))f'(u)du$$

$$= \int_0^1 u \cdot f'(u)du = [uf(u)]_0^1 - \int_0^1 f(u)du = f(1) - \int_0^1 (4^5 + 4^3 + 4)du$$

$$f(1) - \left[\frac{u^6}{6} + \frac{u^4}{4} + \frac{u^2}{2}\right]_0^1 = 3 - \left[\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right] = 3 - \frac{11}{12} = \frac{25}{12}$$

ΘΕΜΑ 4°

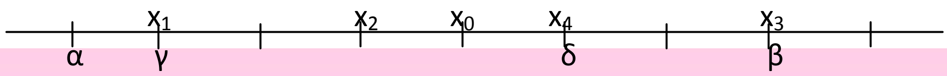
α) Προφανώς $\gamma \neq \delta$ (Αν ήταν $\gamma=\delta$ τότε $f^2(\gamma)<0$ άτοπο)

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτω $\gamma<\delta$, f συνεχής στο $[\gamma,\delta] \subseteq [\alpha,\beta]$

$f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$

Άρα από θ Bolzano υπάρχει 1 τουλάχιστον ρίζα $x_0 \in (\gamma,\delta)$ της f δηλ. $f(x_0)=0$

β)



Επειδή $f(\gamma)\cdot f(\delta)<0$ υποθέτω: $f(\gamma)<0$ και $f(\delta)>0$

(Σε αντίθετη περίπτωση η απόδειξη είναι όμοια)

$$\left.\begin{array}{l} f \;\; \textit{συνεχής στο } [\alpha,\gamma] \\ f \;\; \textit{παραγ. στο } (\alpha,\gamma) \end{array}\right| \overset{\Theta.\mathrm{M.T}}{\Rightarrow} \begin{array}{l} \Upsilon\textit{πάρχει } 1 \textit{ τουλάχιστον } x_1 \in (\alpha,\gamma) \\ f'(x_1) = \dfrac{f(\gamma)-f(a)}{\gamma-\alpha} = \dfrac{f(\gamma)}{\gamma-\alpha} < 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} f \;\; \textit{συνεχής στο } [\gamma,x_0] \\ f \;\; \textit{παραγ. στο } (\gamma,x_0) \end{array}\right| \overset{\Theta.\mathrm{M.T}}{\Rightarrow} \begin{array}{l} \Upsilon\textit{πάρχει } 1 \textit{ τουλάχιστον } x_2 \in (\gamma,x_0) \\ f'(x_2) = \dfrac{f(x_0)-f(\gamma)}{x_0-\gamma} = \dfrac{-f(\gamma)}{x_0-\gamma} > 0 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} f \;\; \textit{συνεχής στο } [x_1,x_2] \\ f \;\; \textit{παραγ. στο } (x_1,x_2) \end{array}\right| \overset{\Theta.\mathrm{M.T}}{\Rightarrow} \begin{array}{l} \Upsilon\textit{πάρχει } 1 \textit{ τουλάχιστον } \xi_1 \in (x_1,x_2) \\ \textit{και άρα } \xi_1 \in (\alpha,\beta) \\ f''(\xi_1) = \dfrac{f'(x_2)-f'(x_1)}{x_2-x_1} > 0 \end{array}$$

Όμοια με ΘΜΤ στα $[\delta,\beta]$, $[x_0,\delta]$ εξασφαλίζω την ύπαρξη σημείων:

$x_3 \in (\delta,\beta)$: $f'(x_3)<0$

$x_4 \in (x_0,\delta)$: $f'(x_4)>0$ οπότε με ΘΜΤ στο $[x_4,x_3]$ υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi_2 \in (x_4,x_3)$ και άρα $\xi_2 \in (\alpha,\beta)$:

$$f''(\xi_2) = \frac{f'(x_3)-f'(x_4)}{x_3-x_4} < 0$$

Άρα υπάρχουν $\xi_1,\xi_2 \in (\alpha,\beta)$: $f''(\xi_1)\cdot f''(\xi_2)<0$

γ) Από το (β) διαπιστώνω ότι:

f'' συνεχής στο κλειστό διάστημα με άκρα ξ_1,ξ_2 $f''(\xi_1)\cdot f''(\xi_2)<0$

Άρα από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον ξ_0 μεταξύ των ξ_1,ξ_2 για το οποίο ισχύει $f''(\xi_0)$ δηλαδή $(\xi_0,f(\xi_0))$ είναι πιθανό σημείο καμπής

<u>Προσοχή</u>

Η παραπάνω προσέγγιση δίνει πιθανό σημείο καμπής. Σε καμία περίπτωση δεν εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός τουλάχιστον σημείου καμπής. Αυτό δεν μπορεί να αποδειχθεί αφού υπάρχουν συναρτήσεις που ικανοποιούν τις προϋποθέσεις όλες και δεν εμφανίζουν σημείο καμπής.

Σύμφωνα όμως με τα δημοσιεύματα του τύπου η παραπάνω προσέγγιση βαθμολογείται με το άριστα δηλαδή 8μ.