ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2022

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολικού βιβλίου σελ. 186

Α2. Διατύπωση θεωρήματος Fermat σελ. 142

Α3. Ορισμός σελ. 161

Α4. α. Σωστό β. Σωστό γ. Σωστό δ. Λάθος ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1. $h(x) = f\left(g(x)\right)$

$$D_h = \{x \in D_g \,/\, g(x) \in D_f\}$$

$$x \ge 0 \qquad \sqrt{x} \le 1$$

$$D_h = [0,1]$$

$$h(x) = \left(\sqrt{x}\right)^4 - 2\left(\sqrt{x}\right)^2 + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 \text{ με } x \in [0,1]$$

Β2. $h(x) = (x-1)^2, x \in [0,1]$

$h'(x) = 2(x-1) < 0$ στο (0,1) και h(x) συνεχής

άρα η h γνησίως φθίνουσα επομένως και «1-1»

$(x-1)^2 = y \overset{y\ge 0}{\Leftrightarrow} |x-1| = \sqrt{y}$ και για $x \in [0,1]$ έχουμε: $-x+1 = \sqrt{y} \Leftrightarrow x = 1-\sqrt{y},\ y \ge 0$

Όμως $x \in [0,1]$ $\quad$ *οπότε* $0 \le 1-\sqrt{y} \le 1 \Leftrightarrow 1 \ge y \ge 0$

Άρα $h^{-1}(x) = 1-\sqrt{x}, x \in [0,1]$

Β3. $\phi(x) = \begin{cases} \dfrac{1-\sqrt{x}}{1-x} & 0 \le x < 1 \\ \dfrac{1}{2}, & x = 1 \end{cases}$

I) φ(x) συνεχής στο (0,1) ως πηλίκο συνεχών συναρτήσεων

$$\lim_{x\to 0^+}(x)=\phi(0)=1$$

$$\lim_{x\to 1^-}\phi(x)=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{(1-x)\left(1+\sqrt{x}\right)}=\frac{1}{2}=\phi(1)$$

η φ (x) συνεχής στο [0,1]

$\phi(0)=1\neq\phi(1)=\dfrac{1}{2}$ Άρα ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Ε.Τ.

II) Αφού: $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ και ημx γνησίως αύξουσα στο $\left(\dfrac{\pi}{6},\dfrac{\pi}{2}\right)$

έχουμε $\eta\mu\dfrac{\pi}{6}<\eta\mu\alpha<\eta\mu\dfrac{\pi}{2}$

$\dfrac{1}{2}<\eta\mu\alpha<1$

Δηλαδή φ(1)<ημα<φ(0) από Θ.Ε.Τ υπάρχει $x_0\in(0,1)$ τ.ω $\phi(x_0)$=ημα

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f(x)=\begin{cases}-2x+c_1, & x\leq -1\\ c_3, & x=-1\\ x^3-x+c_2, & x>-1\end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο R άρα και στο $x_0=-1$

Οπότε: $\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=f(-1)$ (1)

Η f διέρχεται από το $0(0,0)$ άρα $f(0)=0\Leftrightarrow c_1=0$

Έχουμε $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^+}(x^3-x+c_2)=c_2$ και

$\lim\limits_{x\to -1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to -1^-}\left(-2x+c_1\right)=0$

Οπότε από (1) $c_2=0$

Από (1) και $f(-1)=c_3\Leftrightarrow c_3=0$

Άρα $f(x)=\begin{cases}-2x-2, & x\leq -1\\ x^3-x, & x>-1\end{cases}$

Γ2.

Η εφαπτομένη τέμνει τον $y'y$ στο -2 οπότε διέρχεται από το σημείο (0, -2). Έστω $(x_0, f(x_0))$ με $x_0 > -1$ το σημείο επαφής τότε:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

με

$$f(x_0) = x_0^3 - x_0$$

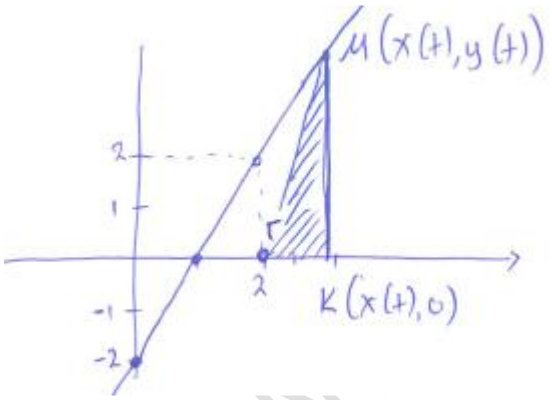
$$f'(x_0) = 3x_0^2 - 1$$

Άρα $-2 - (x_0^3 - x_0) = (3x_0^2 - 1)(-x_0) \Leftrightarrow -2 - x_0^3 + x_0 = 3x_0^3 + x_0 \Leftrightarrow 2x_0^3 = 2$

$\Leftrightarrow x_0^3 = 1 \Leftrightarrow x_0 = 1$ άρα το σημείο επαφής είναι το (1, f(1))

Άρα $f(1) = 0,\ f'(1) = 2$ οπότε $y = 2(x-1) \Leftrightarrow y = 2x - 2$

Γ3.



M (x(t), y(t)) x>2

K (x(t), 0)

Γ (2,0)

(ΓΚ)=x(t)-2

(ΜΚΓ)=Ε(t)=$\frac{1}{2}(x(t)-2)(2x(t)-2) = x^2(t) - 3x(t) + 2$

Ε΄(t)=2x(t)x΄(t)-3x΄(t)

Τη χρονική στιγμή t=t_0 έχουμε $x'(t_0) = 2$ και $x(t_0) = 3$ οπότε

Ε΄(t_0)=2x(t_0)x΄(t_0)-3x΄(t_0)=2·3·2-3· 2=12-6=6 τ. μονάδες / δευτερόλεπτο

Γ4. $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\eta\mu f(x)}{f(x)}+\dfrac{f(-x)}{1-x^3}\right)=1$

Διότι:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-2x-2)=+\infty$

Θέτουμε $\dfrac{1}{f(x)}=u$ και $u_0=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{f(x)}=0$

Οπότε $\lim\limits_{u\to 0} u\cdot\eta\mu\dfrac{1}{u}=0$ (Από εφαρμογή σχολικού με κριτήριο παρεμβολής)

- $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(-x)}{1-x^3}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{f(y)}{1+y^3}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y^3-y}{y^3+1}=1$

Θέτουμε y=-x και $y_0=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x)=+\infty$

Άρα $y\to+\infty$

ΘΕΜΑ Δ

$f(x)=x-\ln(3x)$

Δ1. i) Για x>0: $f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$

x	0		1		$+\infty$
x-1		-	0	+	
x		+		+	
f΄(x)		-	0	+	
f(x)		↘		↗	

f συνεχής στο (0, $+\infty$) οπότε:

- A1=(0,1]

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x-\ln(3x))=+\infty$

$f(1)=1-\ln 3$

Άρα $f(A1)=[1-\ln 3,+\infty)$

- A2 =[1, $+\infty$)

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\ln 3x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{\ln 3x}{x}\right)=+\infty$

Αφού $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln 3x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}=0$

Άρα $f(A_2)=[1-\ln 3,+\infty)$

Το $0\in f(A_1)$ αφού $1-\ln 3<0$ και η f γνησίως φθίνουσα οπότε από Θ.Ε.Τ. υπάρχει μοναδικό $x_1<1$ ώστε $f(x_1)=0$

Το $0\in f(A_2)$ και η f γνησίως αύξουσα οπότε από Θ.Ε.Τ. υπάρχει μοναδικό $x_2>1$ ώστε $f(x_2)=0$

ii) $f''(x)=\dfrac{1}{x^2}>0$ για κάθε $x>0$ άρα f κυρτή στο $(0,+\infty)$

Δ2. $f(x_1)=0\Leftrightarrow x_1-\ln(3x_1)=0\Leftrightarrow \ln(3x_1)=x_1$

$f(x_2)=0\Leftrightarrow x_2-\ln(3x_2)=0\Leftrightarrow \ln(3x_2)=x_2$

$E=\int_{x_1}^{x_2}|f(x)|dx=\int_{x_1}^{x_2}(-f(x))dx$ διότι:

- $x_1<x<1$ $\quad f$ γνησίως φθίνουσα

$f(x_1)>f(x)>f(1)$

$0>f(x)>1-\ln 3$

- $1<x<x_2$ $\quad f$ γνησίως αύξουσα

$f(1)<f(x)<f(x_2)$

$1-\ln 3<f(x)<0$

Άρα $f(x)<0$ στο (x_1,x_2)

Επομένως

$$\mathrm{E}=-\int_{x_1}^{x_2}(x-\ln(3x))dx=-\int_{x_1}^{x_2}xdx+\int_{x_1}^{x_2}\ln(3x)dx=\left[-\frac{x^2}{2}\right]_{x_1}^{x_2}+\int_{x_1}^{x_2}(x'\ln 3x)dx=$$

$$\frac{-x_2^2}{2}+\frac{x_1^2}{2}+[x\ln 3x]_{x_1}^{x_2}-\int_{x_1}^{x_2}x\frac{3}{3x}dx=\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_2^2}{2}+x_2\ln 3x_2-x_1\ln 3x_1-(x_2-x_1)$$

$$\underset{\ln 3x_2=x_2}{\overset{\ln 3x_1=x_1}{=}}\frac{x_1^2}{2}-\frac{x_2^2}{2}+x_2^2-x_1^2-(x_2-x_1)=\frac{x_2^2}{2}-\frac{x_1^2}{2}-(x_2-x_1)=$$

$$\frac{x_2^2-x_1^2-2(x_2-x_1)}{2}=\frac{1}{2}\frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)-2(x_2-x_1)}{1}=\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_2+x_1-2)$$

Δ3. Ν.δ.ο. $f(2-x_1)<0$

Είναι Ε>0 οπότε

$\frac{1}{2}(x_2-x_1)(x_1+x_2-2)>0$ όμως $x_2-x_1>0$

Οπότε πρέπει $x_1+x_2-2>0 \Leftrightarrow 2-x_1<x_2$ αφού η f δεν είναι σταθερή στο $[x_1,x_2]$

Επίσης $x_1<1 \Rightarrow 2-x_1>1$

Οπότε έχουμε $2-x_1<x_2 \underset{2-x_1,x_2\in[1,+\infty)}{\Rightarrow}$ και f γνησίως αύξουσα στο [1,+∞)

$f(2-x_1)<f(x_2) \Rightarrow f(2-x_1)<0$

Δ4.

$$2f(x)+\ln 3-1=f'(x_2)(x-x_2)\overset{f(x_2)=0}{\Leftrightarrow}2f(x)-f(1)-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2)\Leftrightarrow$$
$$f(x)-f(1)+f(x)-f(x_2)=f'(x_2)(x-x_2)$$

Για $x=x_2$, έχουμε

$$f(x_2)-f(1)+f(x_2)-f(x_2)=f'(x_2)(x_2-x_2)$$
$$-f(1)=0 \Leftrightarrow -1+\ln 3=0 \ \alpha\delta\acute{\upsilon}\nu\alpha\tau o$$

Για $x\neq x_2$ $\quad \frac{f(x)-f(1)}{x-x_2}+\frac{f(x)-f(x_2)}{x-x_2}=f'(x_2) \quad (1)$

Για $x<x_2$ έχουμε,

Από Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x,x_2]$,

υπάρχει $\xi\in(x,x_2)$ τ.ω. $f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x)}{x_2-x}=\frac{-f(x)}{x_2-x}=\frac{f(x)}{x-x_2}$,

οπότε η (1) γίνεται:

$\frac{f(x)-f(1)}{x-x_2}+f'(\xi)-f'(x_2)=0$ (2)

f ολικό ελάχιστο στο 1 οπότε: $f(x) \geq f(1) \Leftrightarrow f(x) - f(1) \geq 0$ και $x - x_2 < 0$, οπότε $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - x_2} \leq 0$.

$\xi < x_2 \quad f' \; \textit{γνησίως αύξουσα αφού η } f \textit{ κυρτή}$

$f'(\xi) < f'(x_2)$

$f'(\xi) - f'(x_2) < 0$

Οπότε η (2) αδύνατη, αφού $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - x_2} + [f'(\xi) - f'(x_2)] < 0$

Για $x > x_2$, έχουμε:

Θ.Μ.Τ. για την f στο $[x_2, x]$,

$\xi_1 \in (x_2, x)$ τ.ω. $f'(\xi_1) = \dfrac{f(x) - f(x_2)}{x - x_2} = \dfrac{f(x)}{x - x_2}$,

οπότε η (1) γίνεται: $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - x_2} + f'(\xi_1) - f'(x_2) = 0$ (3)

f ολικό ελάχιστο στο 1, οπότε $f(x) > f(1) \Leftrightarrow f(x) - f(1) > 0$ και $x - x_2 > 0$, οπότε $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - x_2} > 0$

$\xi_1 > x_2 \; f' \textit{γνησίως αύξουσα αφού η } f \textit{ κυρτή}$

$f'(\xi_1) > f'(x_2)$

$f'(\xi_1) - f'(x_2) > 0$

Οπότε η (3) αδύνατη, αφού $\dfrac{f(x) - f(1)}{x - x_2} + (f'(\xi_1) - f'(x_2)) > 0$