ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2023
ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΕΠΑΛ

ΘΕΜΑ Α

Α1.
Απόδειξη σχολ. βιβλίο σελ. 30
Έστω η συνάρτηση $F(x)=cf(x)$
Έχουμε:
$F(x+h)-F(x)=cf(x+h)-cf(x)=c\big(f(x+h)-f(x)\big)$ και για $h\neq 0$
$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\frac{c\big(f(x+h)-f(x)\big)}{h}=c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$
Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\left[c\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]=cf'(x)$
Άρα $(cf(x))'=cf'(x)$

Α2.
Ορισμός σχολ. βιβλίο σελ. 22
Αν το $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται παράγωγος της f στο x_0 και συμβολίζεται με $f'(x_0)$.
Έχουμε λοιπόν $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Α3.
α. Λ　　β. Σ　　γ. Σ　　δ. Λ　　ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

$f(x)=2x^3+ax^2-12x+10 \quad x\in R \quad a\in R$

Β1.
Η f παραγωγίσιμη στο R με $f'(x)=6x^2+2ax-12$.

Β2.
Επειδή η εφαπτομένη της Cf στο $x_0=1$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ έχουμε ότι
$f'(1)=0\Leftrightarrow 6\cdot 1^2+2a\cdot 1-12=0\Leftrightarrow 6+2a-12=0\Leftrightarrow 2a=6\Leftrightarrow a=3$

Β3.

Για $a=3$ είναι $f(x)=2x^3+3x^2-12x+10$ οπότε $f'(x)=6x^2+6x-12$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 6x^2+6x-12=0 \Leftrightarrow 6(x^2+x-2)=0 \Leftrightarrow x=-2 \text{ ή } x=1$

x	$-\infty$	-2		1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty,-2]$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[-2,1]$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1=-2$ με τιμή $f(-2)=2\cdot(-2)^3+3\cdot(-2)^2-12\cdot(-2)+10=-16+12+24+10=30$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_2=1$ με τιμή $f(1)=2\cdot 1^3+3\cdot 1^2-12\cdot 1+10=2+3-12+10=3$

Β4.

$$\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6x^2+6x-12}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{6(x-1)(x+2)}{x-1}=\lim_{x\to 1}[6(x+2)]=6\cdot(1+2)=18$$

ΘΕΜΑ Γ

Κλάσεις	Κεντρική τιμή x_Σ	Συχνότητα x_i	$x_i v_i$
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)	18	v_3	$18v_3$
[20,24)	22	5	110
	Σύνολο		

Είναι $v = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 20 + 15 + v_3 + 5 = 40 + v_3$

$$\sum_{\iota=1}^{4}(x_\iota v_\iota) = x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = 200 + 210 + 18v_3 + 110 = 520 + 18v_3$$

Οπότε $\bar{x} = 14 \Leftrightarrow \dfrac{\sum_{\iota=1}^{4}(x_i v_i)}{v} = 14 \Leftrightarrow \dfrac{520 + 18v_3}{40 + v_3} = 14 \Leftrightarrow 520 + 18v_3 = 14(40 + v_3) \Leftrightarrow$

$$520 + 18v_3 = 560 + 14v_3 \Leftrightarrow 4v_3 = 40 \Leftrightarrow v_3 = 10$$

Γ2.

Επομένως:

Κλάσεις	Κεντρική τιμή x_2	Συχνότητα v_2	$x_i v_i$
[8,12)	10	20	200
[12,16)	14	15	210
[16,20)	18	10	180
[20,24)	22	5	110
	Σύνολο	50	700

Γ3.

Κλάσεις	Κεντρική τιμή $x_Σ$	Συχνότητα v_2	$\left(x_i - \bar{x}\right)$	$\left(x_i - \bar{x}\right)^2$	$v_i\left(x_i - \bar{x}\right)^2$
[8,12)	10	20	-4	16	320
[12,16)	14	15	0	0	0
[16,20)	18	10	4	16	160
[20,24)	22	5	8	64	320
	Σύνολο	50			800

Είναι $s^2 = \dfrac{\sum_{\iota=1}^{4} v_i\left(x_2 - \bar{x}\right)^2}{v} = \dfrac{800}{50} = 16$

Γ4.

$$CV = \frac{s}{|\bar{x}|} = \frac{\sqrt{16}}{14} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7} = 0{,}28 = 28\%$$

Επειδή CV>10% άρα το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad x \neq 0$$

Δ1. Η f για $x \neq 0$ είναι παραγωγίσιμη με

$$f'(x) = -\frac{1'x^2 - 1(x^2)'}{x^4} = -\frac{0-2x}{x^4} = \frac{2x}{x^4} = \frac{2}{x^3}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-		+
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$

Δ2.

Η f στο διάστημα [-4,-1] είναι γνησίως φθίνουσα, οπότε:

$$-4 \leq x \leq -1 \qquad f \searrow$$

$$f(-4) \geq f(x) \geq f(-1)$$

$$-\frac{1}{16} \geq f(x) \geq -1$$

Δ3.

Η εξίσωση εφαπτομένης (ε) της C_f στο σημείο της $A(1, f(1))$είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$, όπου $\lambda = f'(1)$.

Επομένως, $f'(1) = \frac{2}{1} = 2$

Συνεπώς, $\varepsilon : y = 2x + \beta$

Το σημείο επαφής της C_f και της (ε) είναι το $\mathrm{M}(1, f(1))$ δηλαδή $\mathrm{M}(1, -1)$ αφού $f(1) = -\frac{1}{1} = -1$

Αφού $\text{M} \in (\varepsilon)$ ισχύει: $y = 2x + \beta \underset{y=-1}{\overset{x=1}{\Rightarrow}} -1 = 2 \cdot 1 + \beta \Leftrightarrow -1 - 2 = \beta \Leftrightarrow \beta = -3$,

Άρα η ζητούμενη εξίσωση της εφαπτομένης είναι $\varepsilon : y = 2x - 3$

Δ4.

Τα σημεία $\text{A}(x_1, y_1),\ B(x_2,\ y_2),\ \Gamma(x_3,\ y_3)$ είναι σημεία της εφαπτομένης (ε) δηλ.

$y_i = 2x_i - 3 \qquad i = 1, 2, 3$

Οπότε: $\bar{y} = 2\bar{x} - 3 = 2 \cdot 4 - 3 = 8 - 3 = 5$ και $s_y = |2| s_x = 2 \cdot 2 = 4$

Άρα $CV = \dfrac{s_y}{|\bar{y}|} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8 = 80\%$