ΦΡΟΝΤΙΣΤΗΡΙΑ ΑΝΑΤΟΛΙΚΟ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ 2023

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

Απόδειξη από σχολικό βιβλίο σελίδα 111

Α2.

Ορισμός από σχολικό βιβλίο σελίδα 104

Α3.

Ορισμός από σχολικό βιβλίο σελίδα 128

Α4.

α) Λάθος

β) Λάθος

γ) Λάθος

δ) Σωστό

ε) Σωστό

ΘΕΜΑ Β

g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\qquad g(x) = \dfrac{4-e^{2x}}{e^x}$

h: $(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ $\qquad h(x) = \ln x$

Β1.

f=goh

$Af = \{x \in Ah / h(x) \in Ag\}$

$$\left.\begin{array}{r} x>0 \\ \ln x \in \mathrm{R} \end{array}\right\} x>0$$

Οπότε

$$f(x)=(goh)(x)=g(h(x))=g(\ln x)=\frac{4-e^{2\ln x}}{e^{\ln x}}=\frac{4-e^{\ln x^2}}{x}=\frac{4-x^2}{x} \quad x>0$$

B2.

$$f(x)=\frac{4-x^2}{x} \quad x>0$$

i. Η f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x)=\frac{(4-x^2)' x-(4-x^2)x'}{x^2}=\frac{-2x^2-4+x^2}{x^2}=\frac{-x^2-4}{x^2}=\frac{-(x^2+4)}{x^2}<0 \ \text{για κάθε } x>0$$

και η f συνεχής άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$

ii.Είναι $\pi>e$ και η f γνησίως φθίνουσα

άρα $f(\pi)<f(e) \Leftrightarrow \dfrac{4-\pi^2}{\pi}<\dfrac{4-e^2}{e}$ και π, e>0, 4-e^2<0

οπότε $\dfrac{4-\pi^2}{4-e^2}>\dfrac{\pi}{e}$

B3.

Ασύμπτωτες της C_f

Κατακόρυφη

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{4-x^2}{x}=4(+\infty)=+\infty$ αφού $\lim\limits_{x\to 0^+} x=0$ και $x>0$ στο $x\to 0^+$ άρα

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty$

Επομένως η x=0 κατακόρυφη ασύμπτωτη της Cf

Πλάγια – Οριζόντια

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{4-x^2}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{4-x^2}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^2}{x^2}=-1=\lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-x^2}{x}+x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{4}{x}=0=\beta$$

Άρα η ευθεία y=-x πλάγια ασύμπτωτη της Cf στο $+\infty$

B4.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}$$

Είναι $\left|\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}\right|=\left|\frac{1}{f(x)}\cdot\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right|=\left|\frac{1}{f(x)}\right|\cdot\left|\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)\right|\leq\left|\frac{1}{f(x)}\right|$

αφού $\sigma\upsilon\nu(1+x^2)\leq 1$

άρα $-\left|\frac{1}{f(x)}\right|\leq\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}\leq\left|\frac{1}{f(x)}\right|$

$$\lim_{x\to+\infty}-\left|\frac{1}{f(x)}\right|=\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{1}{\frac{4-x^2}{x}}\right|\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{x}{4-x^2}\right|\right)=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\left|\frac{1}{f(x)}\right|\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{1}{\frac{4-x^2}{x}}\right|\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\left|\frac{x}{4-x^2}\right|\right)=0$$

άρα από κριτήριο παρεμβολής $\lim_{x\to+\infty}\frac{\sigma\upsilon\nu\left(1+x^2\right)}{f(x)}=0$

ΘΕΜΑ Γ

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 & x<1 \\ \dfrac{1}{x}+a & x\geq 1 \end{cases} \qquad a\in R$$

Και $\displaystyle\int_2^3 xf(x)dx=1$

Γ1.

Είναι $\displaystyle\int_2^3 xf(x)dx=1 \Leftrightarrow \int_2^3\left[x\left(\frac{1}{x}+a\right)\right]dx=1 \Leftrightarrow \int_2^3(1+ax)dx=1 \Leftrightarrow \left[x+a\frac{x^2}{2}\right]_2^3=1 \Leftrightarrow$

$$\left(3+\frac{9}{2}a\right)-(2+2a)=1 \Leftrightarrow 3+\frac{9a}{2}-2-2a=1 \Leftrightarrow \frac{9a}{2}-2a=0 \Leftrightarrow \frac{5a}{2}=0 \Leftrightarrow a=0$$

Επομένως

$$f(x)=\begin{cases} x^2-3x+3 & x<1 \\ \dfrac{1}{x} & x\geq 1 \end{cases}$$

Γ2.

Η f συνεχής στο $(-\infty,1)$ και $(1,+\infty)$

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^-}(x^2-3x+3) \\ \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{1}{x}=1 \end{array}\right\} \lim\limits_{x\to 1} f(x)=1 \\ f(1)=1 \end{array}\right\} \text{άρα η } f \text{ συνεχής στο } 1, \text{ οπότε η } f \text{ συνεχής στο } R.$$

i. Αρκεί να δείξω ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2-3x+2}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{(x-1)(x-2)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}(x-2)=-1$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1-x}{x}}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{-(x-1)}{x(x-1)}=\lim_{x\to 1^+}\left(-\frac{1}{x}\right)=-1$$

Άρα η f είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=1$ αφού $\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$

ii. Η εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της Cf είναι

$y-f(1)=f'(1)(x-1)$

$y-1=-(x-1)$

$y=-x+2$

Η γωνία ω που σχηματίζει η ευθεία (ε) με τον άξονα $x'x$ είναι

$\varepsilon\phi\omega = f'(1)=-1$

Άρα

$\omega=135^0$

Γ3.

Για $x<1$ η f παραγωγίσιμη, με $f'(x)=2x-3<0$

Άρα η f γνωσίως φθίνουσα στο $(-\infty,\,1)$

Για $x>1$ η f παραγωγίσιμη με $f'(x)=-\frac{1}{x^2}<0$

Άρα η f γνωσίως φθίνουσα στο $[1,\,+\infty)$

Και η f συνεχής στο 1

άρα η f γνησίως φθίνουσα στο R οπότε 1-1.

$A=R$

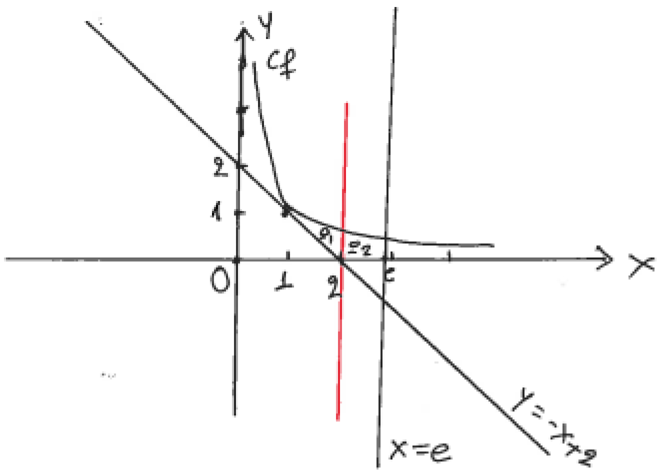
$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-3x+3)=\lim_{x\to-\infty} x^2=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Η f συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο R

Άρα $f(R) = f((-\infty, +\infty)) = \left(\lim_{x\to+\infty} f(x),\ \lim_{x\to-\infty} f(x)\right) = (0, +\infty)$

Γ4.



$$f(x) = \frac{1}{x} \qquad g(x) = -x+2 \qquad h(x) = 0$$

- $f(x) = g(x) \quad x \geq 1$ οπότε

$$\frac{1}{x} = -x+2 \Leftrightarrow -x^2+2x = 1 \Leftrightarrow x^2-2x+1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

Άρα $\mathrm{A}(1, 1)$.

- $g(x) = h(x) \Leftrightarrow -x+2 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \qquad \mathrm{B}\ (2, 0)$

$$E(\Omega) = \int_1^2 (f(x)-g(x))dx + \int_2^e (f(x)-h(x))dx = \int_1^2 \left(\frac{1}{x}+x-2\right)dx + \int_2^e \frac{1}{x}dx =$$

$$= \left[\ln|x| + \frac{x^2}{2} - 2x\right]_1^2 + [\ln|x|]_2^e = (\ln 2+2-4) - \left(0+\frac{1}{2}-2\right) + (\ln e - \ln 2) =$$

$$= \ln 2 - 2 + \frac{3}{2} + 1 - \ln 2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}\,\tau.\mu.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Ν.δ.ο κ=3

Θεωρώ $g(x) = \dfrac{f(x) - 2x}{x-1}$ $x \neq 1$ και $\lim\limits_{x \to 1} g(x) = l$

$$f(x) - 2x = g(x)(x-1) \Leftrightarrow f(x) = g(x)(x-1) + 2x$$

οπότε $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1}\left[g(x)(x-1) + 2x\right] = l \cdot 0 + 2 = 2$ και η f συνεχής άρα

$$f(1) = \lim_{x \to 1} f(x) = 2$$

Επομένως

$$f(1) = 2 \Leftrightarrow \ln(2-1) - 1 + \kappa = 2 \Leftrightarrow \ln 1 - 1 + \kappa = 2 \Leftrightarrow 0 + \kappa = 3 \Leftrightarrow \kappa = 3$$

Οπότε $f(x) = \ln(2-x) - \dfrac{1}{x} + 3 \quad x \in (0,2)$

Δ2.

Η f παραγωγίσιμη στο (0,2) με $f'(x) = \dfrac{-1}{2-x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x^2 + x - 2}{x^2(x-2)} = \dfrac{(x+2)(x-1)}{x^2(x-2)}$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{(x+2)(x-1)}{x^2(x-2)} = 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ή } x = 1$$

x	0		1		2
$f'(x)$		+	0	-	
f		↗		↘	

A1=(0, 1] A2=[1, 2)

- $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+}\left(\ln(2-x) - \dfrac{1}{x} + 3\right) = -\infty$

- $f(1)=2$
- $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\ln(2-x)-\frac{1}{x}+3\right)=(-\infty)-\frac{1}{2}+3=-\infty$

Η f γνησίως αύξουσα στο $(0,\ 1]$ και συνεχής, άρα

$f(A_1)=f((0,1])=(\lim\limits_{x\to 0^+} f(x), f(1)]=(-\infty,2]$

$0\in f(A_1)$ άρα υπάρχει $x_1\in(0,1)$τ.ω $f(x_1)=0$ και η f γνησίως αύξουσα, άρα μοναδικό.

Η f γνησίως φθίνουσα στο $[1,\ 2)$ και συνεχής, άρα

$f(A_2)=f([1,\ 2))=(\lim\limits_{x\to 2^-} f(x),\ f(1)]=(-\infty,2]$

$0\in f(A_2)$ άρα υπάρχει $x_2\in(1,\ 2)$τ.ω $f(x_2)=0$ και η f γνησίως φθίνουσα, άρα μοναδικό.

Άρα η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες.

Είναι $f\left(\frac{1}{3}\right)=\ln\left(2-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{\frac{1}{3}}+3=\ln\frac{5}{3}-3+3=\ln\frac{5}{3}>0\ \ \kappa\alpha\iota\ \ f(x_1)=0$

Άρα $f(x_1)<f\left(\frac{1}{3}\right)$ και η $f \nearrow$ οπότε $x_1<\frac{1}{3}$

Δ3.

Θ.Μ.Τ για την f στο $\left[x_1,\frac{1}{3}\right]$

Η f συνεχής στο $\left[x_1,\frac{1}{3}\right]$

Η f παραγωγίσιμη στο $\left(x_{1,}\ \frac{1}{3}\right)$

Άρα υπάρχει 1 τουλάχιστον $\xi \in \left(x_1, \frac{1}{3}\right) \subseteq (0,1)$ τ.ω

$$f'(\xi) = \frac{f\frac{1}{3} - f(x_1)}{\frac{1}{3} - x_1} = \frac{f\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1-3x_1}{3}} = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

$$f'(\xi) = \frac{3f\left(\frac{1}{3}\right)}{1-3x_1}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2x}{x^4} = -\frac{1}{(x-2)^2} - \frac{2}{x^3} < 0$$

Άρα η f΄ γνησίως φθίνουσα οπότε το ξ μοναδικό.

Δ4.

F και G αρχικές της f με $F(x_1) = G(x_2) = 0$

i. $F(x_2) + G(x_1) = 0$

Είναι $F'(x) = f(x) \quad \kappa\alpha\iota \quad G'(x) = f(x)$

Οπότε $F'(x) = G'(x) \Leftrightarrow F(x) = G(x) + c$

Για $x = x_1 \quad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \; F(x_1) = G(x_1) + c \Leftrightarrow G(x_1) = -c$

Για $x = x_2 \quad \varepsilon\acute{\iota}\nu\alpha\iota \; F(x_2) = G(x_2) + c \Leftrightarrow F(x_2) = c$

Οπότε προσθέτοντας κατά μέλη προκύπτει

$F(x_2) + G(x_1) = 0$

ii. Είναι $x_1(F(x) - 1) + x_2(G(x) - 1) + 2x = 0$

Θεωρώ $h(x) = x_1(F(x) - 1) + x_2(G(x) - 1) + 2x$

h συνεχής στο $[x_1, x_2]$

- $h(x_1)=x_1\left(F(x_1)-1\right)+x_2\left(G(x_1)-1\right)+2x_1=-x_1+x_2\left(G(x_1)-1\right)+2x_1=$

  $x_1+x_2\left(G(x_1)-1\right)=x_1+x_2G(x_1)-x_2$

- $h(x_2)=x_1\left(F(x_2)-1\right)+x_2\left(G(x_2)-1\right)+2x_2=$

  $=x_1\left(F(x_2)-1\right)+x_2=x_1\left(-G(x_1)-1\right)+x_2=-x_1G(x_1)-x_1+x_2$

Όμως

Επειδή $f(x_1)=0$ και $f(x_2)=0$ και η x_1, x_2 διαδοχικές ρίζες της f

άρα $f(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\left(x_1,x_2\right)$ και η f συνεχής άρα διατηρεί σταθερό πρόσημο και $f(1)=2>0$ άρα $f(x)>0$ στο (x_1, x_2)

Επίσης $G'(x)=f(x)>0$

Άρα G γνησίως αύξουσα στο $\left[x_1x_2\right]$

Οπότε $x_1<x_2$ $G\nearrow$

$G(x_1)<G(x_2)$ και $G(x_2)=0$ άρα $G(x_1)<0$

Επομένως

$h(x_1)=x_1-x_2+x_2G(x_1)<0$ αφού $x_1-x_2<0$, $x_2>0$ και $G(x_1)<0$

$h(x_2)=x_2-x_1-x_1G(x_1)=-(x_1-x_2+x_1G(x_1))>0$

αφού $x_1-x_2<0$, $x_1>0$ και $G(x_1)<0$

Οπότε $h(x_1)\cdot h(x_2)<0$

Άρα από θεώρημα Bolzano η εξίσωση $h(x)=0$ έχει 1 τουλάχιστον ρίζα στο (x_1, x_2)

$h'(x)=x_1F'(x)+x_2G'(x)+2=x_1f(x)+x_2f(x)+2=(x_1+x_2)\cdot f(x)+2>0$

Άρα η h γνησίως αύξουσα στο $[x_1, x_2]$ οπότε η εξίσωση

$h(x)=0 \Leftrightarrow x_1F(x)+x_2G(x)=x_1+x_2-2x$ έχει μοναδική ρίζα στο $\left(x_1,\ x_2\right)$