Πανελλαδικές εξετάσεις

04/6/2024

Μαθηματικά

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Απόδειξη σχολ. βιβλίο σελ 76

Α2. Ορισμός σχολ. βιβλίο σελ 155

Α3. Ορισμός σχολ. βιβλίο σελ. 216

Α4.

α) Σωστό σελ 25

β) Σωστό σελ. 52

γ) Λάθος σελ. 114

δ)Λάθος σελ. 142

ε) Σωστό σελ. 212

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$Df = x \in Ag \cap Ah \; \mu\varepsilon \; h(x) \neq 0\} = \{x \geq 1 \kappa\alpha\iota \; x \neq 1\} = (1, +\infty]$$

- $h(x) \neq 0 \; \acute{\alpha}\rho\alpha \; \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}} \neq 0. \; \acute{A}\rho\alpha \; x \neq 1$

  Οπότε $Af = (1, +\infty)$

- $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \frac{\frac{x+1}{\sqrt{x}}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{x+1}{x-1}$

  $Ar = Ag \cap Ah = [1, +\infty)$

  $r(x) = g(x) \cdot h(x) = \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) = x - \frac{1}{x}, \; x \geq 1$

B2.

Η f είναι παρ/μη στο $(1, +\infty)$με $f'(x)=\dfrac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=\dfrac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=-\dfrac{2}{(x-1)^2}$

$f'(x)<0 \ για \ x>1$οπότε f γνησίως φθίνουσα στο $(1, +\infty)$

Οπότε η f είναι 1 – 1 άρα αντιστρέφεται .

$Af^{-1}=f(A)=\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x), \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)\right)$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x+1}{x-1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$
- $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)=\lim\limits_{x\to1^+}\left[(x+1)\cdot\dfrac{1}{x-1}\right]=+\infty$ διότι

  $\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)=2$

  $\lim\limits_{x\to1^+}\dfrac{1}{x-1}=+\infty$

Άρα $Af^{-1}=(1, +\infty)$

Θέτουμε $y=f(x) \ με \, x>1 \ και \ y>1$

Άρα $y=\dfrac{x+1}{x-1}\Leftrightarrow y(x-1)=x+1\Leftrightarrow yx-y=x+1\Leftrightarrow yx-x=y+1$

$\Leftrightarrow x(y-1)=y+1\Leftrightarrow x=\dfrac{y+1}{y-1}$

Άρα $f^{-1}(y)=\dfrac{y+1}{y-1} \ με \ y>1$

Οπότε $f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1} \ με \ x>1$

Ισχύει ότι $Af=Af^{-1}$ και $f(x)=f^{-1}(x) \ για \, x\in(1, +\infty)$

Οπότε $f=f^{-1}$

B3.

Η r δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες επειδή είναι συνεχής στο $[1, +\infty)$

Έστω $y=\lambda x+\beta$ ασύμπτωτη της r στο $+\infty$

- $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^2-1}{x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

Άρα $\lambda=1$

- $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\lambda x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-\frac{1}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$

Οπότε $\beta=0$

Άρα η $y=x$ είναι πλάγια ασύμπτωτη της r στο $+\infty$.

B4.

Για $x>1$ έχουμε:

$$\left(f^{-1}(f(x))\right)^2=1+4r(x)\Leftrightarrow x^2=1+4\left(x-\frac{1}{x}\right)\Leftrightarrow x^2=1+4x-\frac{4}{x}\Leftrightarrow x^3=x+4x^2-4$$

$$\Leftrightarrow x^3-4x^2-x+4=0\Leftrightarrow x^2(x-4)-(x-4)=0\Leftrightarrow (x-4)(x^2-1)=0$$

$$\Leftrightarrow \left(x-4=0 \text{ ή } x^2-1=0\right)$$

Οπότε $x-4=0\Leftrightarrow x=4$ ή $x^2-1=0\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow (x=1 \text{ ή } x=-1)$ που απορρίπτονται αφού $x>1$ άρα x=4

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Η συνεχής στο $x_0=2$ άρα

$$\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^+}f(x)=f(2)\quad(1)$$

- $\lim_{x\to2^-}f(x)=\lim_{x\to2^-}\left(-2x+4+e^{\lambda}\right)=e^{\lambda}$
- $\lim_{x\to2^+}f(x)=\lim_{x\to2^+}\left(-x^2+4x-3+\lambda\right)=-4+8-3+\lambda=1+\lambda$
- $f(2)=1+\lambda$

Από (1) προκύπτει ότι: $e^{\lambda}=1+\lambda$ άρα $\lambda=0$

Διότι ισχύει ότι $e^x\geq x+1$ για κάθε $x\in\Re$ με την ισότητα να ισχύει για $x=0$.

Γ2.

f παρ/μη στο $[0,\ 2)$με $f\,'(x)=-2<0$

f παρ/μη στο $(2,\ +\infty)$με $f\,'(x)=-2x+4<0$

και η f συνεχής στο $[0,+\infty)$ άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $[0,\ +\infty)$ και στο $x_0=0$ έχει ολικό μέγιστο το $f(0)=5$

Γ3.

i) f συνεχής στο $[0,\ 3]$

ii) f παρ/μη στο $(0,\ 2)$με $f\,'(x)=-2$
f παρ/μη στο $(2,\ 3)$με $f\,'(x)=-2x+4$
Στο $x_0=2$

- $$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+5-1}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2x+4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-2(x-2)}{x-2}=-2$$
- $$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+4x-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{-(x-2)^2}{x-2}=0$$

Η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο $x_0=2$ οπότε δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θ.Μ.Τ.

iii) Η ευθεία ζ που διέρχεται από τα σημεία Δ(0, f(0)) και Ε(3,f(3)) έχει συντελεστή διεύθυνσης $\lambda=\dfrac{f(3)-f(0)}{3-0}=\dfrac{0-5}{3}=-\dfrac{5}{3}$

Η εφαπτομένη της Cf στο σημείο Γ(ξ, f(ξ)) έχει συντελεστή διεύθυνσης f΄(ξ) άρα $f'(\xi)=-\dfrac{5}{3}$ αφού είναι παράλληλες.

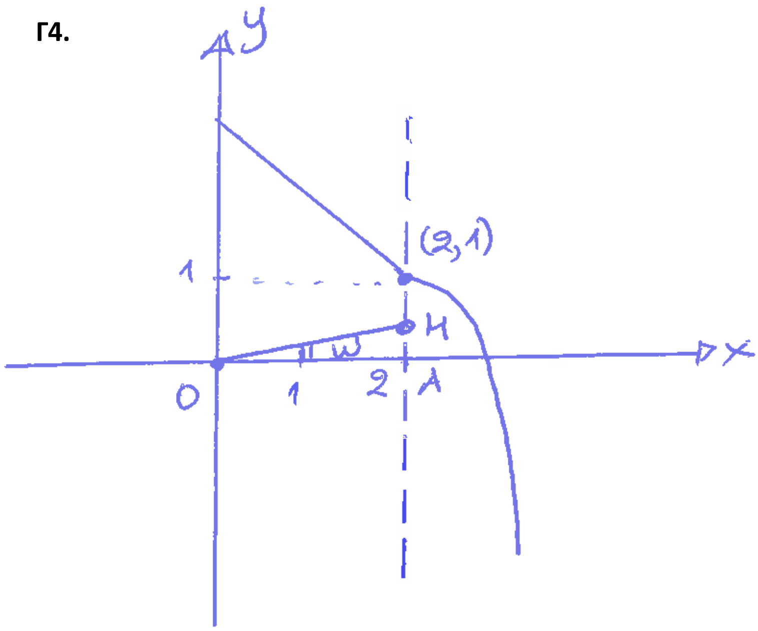
Για $x\in(0,2)$: $f\,'(x)=-2$ οπότε δεν υπάρχει ξ ώστε $f\,'(\xi)=-\dfrac{5}{3}$

Για $x\in(2,3)$: $f\,'(x)=-\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow -2x+4=-\dfrac{5}{3}\Leftrightarrow -6x+12=-5\Leftrightarrow -6x=-17\Leftrightarrow x=\dfrac{17}{6}$

Επειδή $2<\dfrac{17}{6}<3$ άρα $\xi=\dfrac{17}{6}$

Άρα υπάρχει $\xi\in(0,3)$τέτοια ώστε η εφαπτομένη παράλληλη στην ευθεία ζ.

Γ4.



$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{OA}} \quad o\pi\acute{o}\tau\varepsilon \quad \varepsilon\varphi\omega(t) = \frac{y(t)}{2}$$

Οπότε:

$$\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega(t)} \cdot \omega'(t) = \frac{y'(t)}{2}$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\omega = \frac{1}{1+\varepsilon\varphi^2\omega} \Leftrightarrow 1+\varepsilon\varphi^2\omega = \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} \Leftrightarrow \frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2\omega} = 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

Οπότε $\frac{5}{4} \cdot \omega'(t_0) = \frac{y'(t_0)}{2} \Leftrightarrow \omega'(t_0) = \frac{4 \cdot y'(t_0)}{10} = \frac{4 \cdot 0{,}5}{10} = \frac{1}{5}$ rad/sec

ΘΕΜΑ Δ

$$f(x) = \frac{\ln x + ax}{x}, x > 0$$

$$f\left((0,+\infty)\right) = \left(-\infty, 1+\frac{1}{e}\right]$$

Δ1. f παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{1}{x}+a\right)x - (\ln x + \alpha x)}{x^2} = \frac{1+ax-\ln x - ax}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2}$$

$f'(x) = 0$ άρα $1-\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e$

$1-\ln x>0 \Leftrightarrow 1>\ln x \Leftrightarrow x<e$

$1-\ln x<0 \Leftrightarrow \ln x>1 \Leftrightarrow x>e$

x	0		e		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)		$\nearrow$		$\searrow$	

Για x>0 ισχύει: $f(x)\le 1+\dfrac{1}{e}$ από το σύνολο τιμών

Η f στο $x_0=e$ παρουσιάζει ολικό μέγιστο το $f(e)=\dfrac{\ln e+\alpha\cdot e}{e}=\dfrac{1+ae}{e}$. Οπότε

$$\frac{1+ae}{e}=1+\frac{1}{e}\Leftrightarrow \frac{1}{e}+a=1+\frac{1}{e}\Leftrightarrow a=1$$

Δ2. Για α=1: $f(x)=\dfrac{\ln x+x}{x}$

f συνεχής στο $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{-\ln 2+\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{\frac{22\ln 2+1}{2}}{\frac{1}{2}}=-2\ln 2+1=-\ln 4+\ln e=\ln\frac{e}{4}<0$$

$f(1)=1>0$

Οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in\left(\dfrac{1}{2},1\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_0)=0$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,e]$ οπότε σε αυτό έχει ρίζα μόνο το x_0

Θα εξετάσουμε αν η f έχει ρίζα στο $(e,+\infty)$

Οπότε $f((e,+\infty))=\left(\lim\limits_{x\to+\infty}f(x),\lim\limits_{x\to e^+}f(x)\right)$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x+x}{x}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{\underset{DLH}{=}}\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{x}+1\right)=1$
- $\lim\limits_{x\to+e^+}f(x)=\lim\limits_{x\to+e^+}\dfrac{\ln x+x}{x}=1+\dfrac{1}{e}$

Άρα $f((e,+\infty))=\left(1,1+\dfrac{1}{e}\right)$

Το $0 \notin f\left(\left(e,+\infty\right)\right)$ άρα η f(x)=0 έχει μοναδική ρίζα το $x_0 \in \left(\frac{1}{2},1\right)$

Δ3. i.

- $f(4) = \frac{\ln 4 + 4}{4} = \frac{\ln 4}{4} + 1 = \frac{2\ln 2}{4} + 1 = \frac{\ln 2}{2} + 1 = f(2)$
- Για $x \in (e,+\infty)$ η f είναι 1-1 (αφού f γνησίως φθίνουσα) άρα $f(x) = f(4) \Rightarrow x = 4$
- Για $x \in (0,e)$ η f είναι 1-1 (αφού f γνησίως αύξουσα) άρα $f(x) = f(2) \Rightarrow x = 2$

ii.

$2^x \le x^2$ για x>0 οπότε:

$\ln 2^x \le \ln x^2 \Leftrightarrow x \cdot \ln 2 \le 2\ln x \overset{x>0}{\Leftrightarrow} \frac{\ln 2}{2} \le \frac{\ln x}{x} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} + 1 \le \frac{\ln x}{x} + 1 \Leftrightarrow f(2) \le f(x)$

- για $x \in (0,e]$: $f(x) \ge f(2) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow} x \ge 2$ άρα $x \in [2,e]$
- για $x \in (e,+\infty)$: $f(x) \ge f(2) \Leftrightarrow f(x) \ge f(4) \overset{f\downarrow}{\Leftrightarrow} x \le 4$

οπότε $x \in [2,4]$

Δ4.

$g(x) = f(e^x) \cdot \frac{1-x}{e^x}$

$E(\Omega) = \int_{-\ln 2}^{o} |g(x)| dx$

Άρα $\mathrm{E}(\Omega) = \int_{-\ln 2}^{0} \left| f\left(e^x\right) \cdot \frac{1-x}{e^x} \right| dx$

θέτουμε $e^x = u \rightarrow x = \ln u$ οπότε $\frac{du}{dx} = e^x$ άρα $dx = \frac{du}{e^x}$

X	-ln2	0
u	$\frac{1}{2}$	1

Οπότε: $\mathrm{E}(\Omega) = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u) \frac{(1-\ln u)}{u^2} \right| du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u) \cdot \frac{1-\ln u}{u^2} \right| du = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \left| f(u) \cdot f'(u) \right| du$

- $f'(u) > 0$ διότι $1 - \ln u > 0 \Leftrightarrow 1 > \ln u \Leftrightarrow u < e$
- Η f μηδενίζεται στο $u_0 \in \left(\frac{1}{2},1\right)$ οπότε για $u < u_0 \Leftrightarrow f(u) < f(u) \Leftrightarrow f(u) < 0$
- Για $u > u_0 \Leftrightarrow f(u) > f(u_0) \Leftrightarrow f(u) > 0$

Οπότε $\mathrm{E}(\Omega) = -\int_{\frac{1}{2}}^{0} f(u)\cdot f'(u)du + \int_{x_0}^{1} f(u)f'(u)du$

$$= -\left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{x_0} + \left[\frac{f^2(u)}{2}\right]_{x_0}^{1} = -\left(\frac{f^2(x_0)}{2} - \frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2}\right) + \left(\frac{f^2(1)}{2} - \frac{f^2(x_0)}{2}\right) =$$

$$\frac{f^2\left(\frac{1}{2}\right)}{2} + \frac{f^2(1)}{2} = \frac{\ln^2\frac{e}{4}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\ln^2\frac{e}{4}+1}{2} = 2\ln^2 2 - 2\ln 2 + 1$$ τ. μονάδες

Αφού $f(x_0) = 0$ από Δ1 ερώτημα