ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ & ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΤΕΤΑΡΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2026

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΕΝΔΕΙΚΤΙΚΕΣ ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1.

Απόδειξη σχ. Βιβλίου σελ. 133

Α2.

Διατύπωση σχ. Βιβλίου σελ. 51

Α3.

Ορισμός σχ. Βιβλίου σελ. 185

Α4.

α) Λ

β)Σ

γ) Σ

δ) Σ

ε) Λ

ΘΕΜΑ Β

$f:(1,+\infty)\to R \qquad f(x)=2\ln(x-1)$

$g:[2,+\infty)\to R \qquad g(x)=\sqrt{x-2}+1$

Β1.

$h=fog$

$Ah=\{x\in Ag\,/\,g(x)\in Af\}=(2,+\infty)$

$$\left.\begin{matrix} x\geq 2 \\ g(x)>1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} x\geq 2 \\ \sqrt{x-2}+1>1\end{matrix}\right\}\ \left.\begin{matrix} x\geq 2 \\ \sqrt{x-2}>0\end{matrix}\right\} x>2$$

$$h(x)=f(g(x))=2\ln\sqrt{x-2}=\ln\sqrt{x-2}^{\,2}=\ln(x-2) \qquad x>2$$

B2.

$$h(x)=\ln(x-2) \qquad x>2$$

Η h συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(2,+\infty)$ με

$$h'(x)=\frac{1}{x-2}>0 \quad \acute{\alpha}\rho\alpha \quad h \;\; \gamma\nu\omega\sigma\acute{\iota}\omega\varsigma \;\; \alpha\acute{\upsilon}\xi o\upsilon\sigma\alpha$$

Άρα 1-1, άρα αντιστρέφεται

$$\lim_{x\to 2^+} h(x)=\lim_{x\to 2^+}\ln(x-2)\underset{y\to 0^+}{\overset{x-2=y}{=}}\lim_{y\to 0^+}\ln y=-\infty$$

$$\lim_{x\to +\infty} h(x)=\lim_{x\to +\infty}\ln(x-2)\underset{y\to +\infty}{\overset{x-2=y}{=}}\lim_{y\to +\infty}\ln y=-\infty$$

Άρα $h((2,+\infty))\underset{\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{\overset{h\uparrow}{=}}\left(\lim\limits_{x\to 2^+} h(x),\ \lim\limits_{x\to +\infty} h(x)\right)=R=Ah^{-1}$

Για $x\in(2,+\infty)$ και $y\in R$

$$h(x)=y\Leftrightarrow \ln(x-2)=y\Leftrightarrow x-2=e^y \Leftrightarrow x=e^y+2$$

$$\left.\begin{array}{l} h(x)=y\Leftrightarrow h^{-1}(y)=x \\ x=e^y+2 \end{array}\right\} h^{-1}(y)=e^y+2 \quad y\in R$$

Άρα $h^{-1}(x)=e^x+2 \;\; x\in R$

B3.

$$\lim_{x\to 2}\left(h(x)\cdot\frac{f(x)}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\ln(x-2)\cdot\frac{2\ln(x-1)}{x-2}\right)=(-\infty)\cdot 2=-\infty$$

Αφού $\lim\limits_{x\to 2^+}\ln(x-2)\underset{y\to 0^+}{\overset{x-2=y}{=}}\lim\limits_{y\to 0^+}\ln y=-\infty$

$$\lim_{x\to 2}\frac{2\ln(x-1)}{x-2}\underset{DLH}{\overset{\frac{0}{0}}{=}}\lim_{x\to 2}\frac{\frac{2}{x-1}}{1}=2$$

ΘΕΜΑ Γ

$f: R \to R$

$$f(x) = \frac{\kappa x^3 + \mu x}{x^2 + 1}$$

- Οριζόντια στο $+\infty$
- $y = x$ εφάπτεται στη Cf στο $(0,\ 0)$

Γ1.

$f'(0) = 1$

$$f'(x) = \frac{(3\kappa x^2 + \mu)(x^2+1) - (\kappa x^2 + \mu x)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(0) = 1 \Leftrightarrow \frac{\mu}{1} = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \to +\infty} \frac{\kappa x^3 + x}{x^2 + 1} = l$$

Αν $\kappa \neq 0$ **τότε** $l = \lim_{x \to +\infty} \frac{\kappa x^3}{x^2} = \lim_{x \to +\infty} \kappa x = \begin{cases} +\infty & \alpha\nu\ \kappa > 0 \\ -\infty & \alpha\nu\ \kappa < 0 \end{cases}$ **άτοπο**

Άρα $\kappa = 0$

Γ2.

i. $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ $\quad x \in R$

$$f'(x) = \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1 - x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \ \ \acute{\eta}\ \ x = -1$$

Η f συνεχής στο $(-\infty,\ -1]$ με $f'(x) < 0$ στο $(-\infty,\ -1)$ άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,\ -1]$.

Η f συνεχής στο $[-1,\ 1]$ με $f'(x) > 0$ στο $(-1,\ 1)$ άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $[-1,\ 1]$.

Η f συνεχής στο $[1,\ +\infty)$ με $f'(x) > 0$ στο $(1,\ +\infty)$ άρα η f γνησίως φθίνουσα στο $[1,\ +\infty)$.

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο -1 με τιμή $f(-1)=-\frac{1}{2}$

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο 1 με τιμή $f(1)=\frac{1}{2}$

ii.

$A_1=(-\infty,-1]$ $\quad A_2=[-1,1]$ $\quad A_3=[1,+\infty)$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

$$f(A_1)\underset{\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{\overset{f\downarrow}{=}}\left[f(-1),\lim_{x\to-\infty}f(x)\right)=\left[-\frac{1}{2},0\right)$$

$$f(A_2)\underset{\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{\overset{f\uparrow}{=}}\left[f(-1),f(1)\right]=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

$$f(A_3)\underset{\sigma\upsilon\nu\varepsilon\chi\acute{\eta}\varsigma}{\overset{f\downarrow}{=}}\left(\lim_{x\to+\infty}f(x),f(1)\right]=\left(0,\frac{1}{2}\right]$$

$$f(R)=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)=\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$$

iii.

$$f(x)=\frac{1}{2}+a^2$$

Για κάθε $a\in R$ ισχύει $a^2\geq 0\Leftrightarrow \frac{1}{2}+a^2\geq\frac{1}{2}$

- Αν $\frac{1}{2}+a^2>\frac{1}{2}\Leftrightarrow a^2>0\Leftrightarrow a\neq 0$ τότε η εξίσωση είναι αδύνατη διότι $\frac{1}{2}+a^2\notin f(A)$.

- Αν $\frac{1}{2}+a^2=\frac{1}{2}\Leftrightarrow a=0$ η εξίσωση $f(x)=\frac{1}{2}$ έχει μοναδική λύση $x=1$

Άρα

- αν $a \neq 0$ καμία λύση
- αν $a = 0$ 1 λύση

Γ3.

$$Iv = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1}dx$$

i.

$$I_{v+1} = \int_0^1 \frac{x^{2(v+1)+1}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+3}}{x^2+1}$$

$$I_v + I_{v+1} = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}}{x^2+1}dx + \int_0^1 \frac{x^{2v+3}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1} + x^{2(v+1)+1}}{x^2+1}dx = \int_0^1 \frac{x^{2v+1}\cdot(1+x^2)}{x^2+1}dx$$

$$= \int_0^1 x^{2v+1}dx = \left[\frac{x^{2v+1+1}}{2v+2}\right]_0^1 = \left[\frac{x^{2v+2}}{2v+2}\right]_0^1 = \frac{1}{2v+2}$$

ii.

$v = 0$

$$I_0 = \int_0^1 \frac{x}{x^2+1}dx = \left[\frac{\ln(x^2+1)}{2}\right]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

$v = 1$

$$I_0 + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln 2}{2} + I_1 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln 2 + 2I_1 = 1$$

$$I_1 = \frac{1-\ln 2}{2}$$

$v = 2$

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1-\ln 2}{2} + I_2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2(1-\ln 2) + 4I_2 = 1$$

$$4I_2 = 1 - 2(1-\ln 2)$$

$$I_2 = \frac{1-2(1-\ln 2)}{4} = \frac{1-2+2\ln 2}{4} = \frac{2\ln 2 - 1}{4}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Θεωρώ $\mathrm{K}(x)=g(x)+x$

- Η Κ συνεχής στο $[-1,0]$
- K(-1) =g(-1)-1<0 αφού 0<g(x)<1
  K(0)=g(0)>0 για x=-1 είναι 0<g(-1)<1 άρα g(-1)-1<0
  Οπότε K(-1)K(0)<0 για x=0 0<g(0)

Σύμφωνα με το θεώρημα Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1\in(-1,0)$ τέτοιο ώστε $K(x_1)=0$

Έστω ότι η εξίσωση K(x)=0 έχει δύο ρίζες ρ_1 και ρ_2

- Η Κ συνεχής στο $[\rho_1,\rho\ ]$
- Η Κ παραγωγίσιμη στο (ρ_1,ρ_2) $\mu\varepsilon$ $\mathrm{K}'(x)=g'(x)+1$
- $\mathrm{K}(\rho_1)=\mathrm{K}(\rho_2)=0$

Άρα από θεώρημα Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε

$\mathrm{K}'(\xi)=0\Leftrightarrow g'(\xi)+1=0\Leftrightarrow g'(\xi)=-1$ άτοπο από δεδομένο

Άρα η εξίσωση K(x)=0 έχει το πολύ 1 ρίζα

Οπότε η $x=x_1$ είναι μοναδική ρίζα

Δ2.

Η f παραγωγίσιμη στο 0 άρα $\lim\limits_{x\to0^-}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$ (1)

Οπότε

$$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^-}\frac{x^2(g(x)+x)}{x}=\lim_{x\to0^-}(x(g(x)+x))=0$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to0^+}\frac{2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-\kappa x}{x}=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{2\eta\mu x}{x}+\frac{\varepsilon\varphi x}{x}-\kappa\right)=2+1-\kappa=3-\kappa$$

Αφού $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\varepsilon\varphi x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\eta\mu x}{x\sigma\upsilon\nu x}=1$

Επομένως από (1) $3-\kappa=0\Leftrightarrow\kappa=3$

Δ3

i.

$$f(x)=2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x \quad \gamma\iota\alpha \quad x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$$

Η f συνεχής και παραγωγίσιμη με

$$f'(x)=2\sigma\upsilon\nu x+\frac{1}{\sigma\upsilon\nu^2 x}-3=\frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x+1-3\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{2\sigma\upsilon\nu^3 x+1-2\sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu^2 x}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=$$
$$\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)(2\sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu x-1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}=\frac{(\sigma\upsilon\nu x-1)(\sigma\upsilon\nu x-1)(2\sigma\upsilon\nu x+1)}{\sigma\upsilon\nu^2 x}>0$$

Και η f συνεχής άρα η f γνησίως αύξουσα στο $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$

Για $x\geq 0$ f γνησίως αύξουσα

$$f(x)\geq f(0) \; \acute{\alpha}\rho\alpha \; f(x)\geq 0$$

ii.

Το σύνολο τιμών της συνάρτησης f είναι:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(2\eta\mu x+\varepsilon\varphi x-3x)=+\infty$$

Αφού $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\varepsilon\varphi x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}=+\infty \qquad \sigma\upsilon\nu x>0 \;\; \gamma\iota\alpha \;\; x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Επομένως

$$f\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right)\right)=\left[f(0),\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x)\right)=[0,+\infty)$$

Είναι $\quad 3f(x)=\pi \Leftrightarrow f(x)=\frac{\pi}{3}$

$\frac{\pi}{3}\in[0,+\infty)$ άρα υπάρχει $x_2\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $f(x_2)=0$ και η f γνησίως αύξουσα άρα η ρίζα μοναδική

Δ4.

i.

Ν.δ.ο $f(x) \geq 0 \quad [x_1, 0]$

$x^2(g(x)+x) \geq 0$

$x^2 \geq 0$ άρα αρκεί ν.δ.ο $g(x)+x \geq 0$ άρα $\mathrm{K}(x) \geq 0$

Θ.Μ.Τ για την K στο $[x_1, 0]$

Άρα υπάρχει $\xi \in (x_1, 0)$ τ.ω

$$\mathrm{K}'(\xi) = \frac{\mathrm{K}(0)-\mathrm{K}(x_1)}{0-x_1} = \frac{g(0)}{-x_1} > 0$$

Από **Δ1**.

$\mathrm{K}(x) = g(x) + x$

$\mathrm{K}'(x) = g'(x) + 1 \neq 0$

Άρα συνεχής, άρα διατηρεί το πρόσημο.

Άρα $\mathrm{K}'(x) > 0 \qquad x \in [x_1, 0]$

Άρα K γνησίως αύξουσα $x_1 \leq x \leq 0$ K γνησίως αύξουσα

$\mathrm{K}(x_1) \leq \mathrm{K}(x) \leq \mathrm{K}(0)$

$0 \leq \mathrm{K}(x)$

Άρα $f(x) \geq 0$

ii.

$$E = \int_{x_1}^{\pi/3} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi/3} f(x)\,dx$$

$f(x) \geq 0$ και $\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_{0}^{\pi/3} f(x)\,dx$ (2)

- $$\int_0^{\pi/3}(2\eta\mu x + \varepsilon\varphi x - 3x)\,dx = \left[-2\sigma\upsilon\nu x - \ln|\sigma\upsilon\nu x| - \frac{3x^2}{2}\right]_0^{\pi/3} = -2\frac{1}{2} - \ln\frac{1}{2} - \frac{3}{2}\frac{\pi^2}{9} =$$

$$= -1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6} + 2 = 1 + \ln 2 - \frac{\pi^2}{6}$$

- $\int_{x_1}^{0} f(x)\,dx = \int_{x_1}^{0} x^2\left(g(x)+x\right)dx$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\left(g(x)+x\right)\right]_{x_1}^{0} - \int_{x_1}^{0} \frac{x3}{3}\cdot\left(g'(x)+1\right)dx - \frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} \left(x^3 g'(x)+x^3\right)dx =$$

$$-\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx - \frac{1}{3}\left[\frac{x^4}{4}\right]_{x_1}^{0} = -\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx + \frac{1}{3}\frac{x_1^{\ 4}}{4}$$

Οπότε από (2)

$$-\frac{1}{3}\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx + \frac{1}{3}\frac{x_1^{\ 4}}{4} = 1+\ln 2-\frac{\pi^2}{6}$$

$$\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx - \frac{x_1^{\ 4}}{4} = -3-3\ln 2+\frac{\pi^2}{2}$$

$$\int_{x_1}^{0} x^3 g'(x)dx = \frac{x_1^{\ 4}}{4}+\frac{\pi^2}{2}-3\ln 2-3$$